МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ИБРАГИМОВ Рустам Маратович

«ОЦЕНКИ МОМЕНТОВ СИММЕТРИЧЕСКИХ СТАТИСТИК »

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.01.05 -
"Теория вероятностей и математическая статистика

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Ш. Шарахметов

ТАШКЕНТ
1996

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.

Пусть $X_1,\dots,X_n$ - независимые случайные величины (с.в.), принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{E}, A)$, $1 \le m \le n$.

Пусть, далее, $Y\colon \mathcal{E}^m \to \mathbb{R}$ - симметрическая функция m переменных,

$$T_n = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n} Y(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}) \ -$$

симметрическая статистика от с.в. $X_1,\dots,X_n$.

Во многих задачах теории вероятностей, математической статистики, эконометрики и биометрики возникает необходимость в верхних и нижних оценках одинакового порядка для моментов $E|T_n|^t$.

В случае линейных статистик $(m = 1)$ такие оценки даются следующими хорошо известными неравенствами (всюду далее в диссертации $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и т.д. - константы, зависящие только от переменных, стоящих в скобках).

1. Неравенства Розенталя [43]. Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независимые неотрицательные с.в. с конечным t-м моментом, $1 \le t < \infty$, то

$$\max\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i\Big\|_1, \Big(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_t^t\Big)^{1/t}\Big) \le \Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i\Big\|_t \le$$

$$\le A(t)\max\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i\Big\|_1, \Big(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_t^t\Big)^{1/t}\Big). \tag{0.1}$$

Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независимые симметрично распределенные с.в. с конечным t-м моментом, $2 \le t < \infty$, то

$$\max\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i\Big\|_2, \Big(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_t^t\Big)^{1/t}\Big) \le \Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i\Big\|_t \le$$

$$\le B(t)\max\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i\Big\|_2, \Big(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_t^t\Big)^{1/t}\Big). \tag{0.2}$$

2. Неравенство Хинчина [36]. Пусть $t>0$, $a_1,\dots,a_n$ - вещественные числа, $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$ - с.в. с распределениями Бернулли, то есть $P(\epsilon_i = 1) = P(\epsilon_i = -1) = 1/2$, $i = 1,\dots,n$. Тогда

$$C_1(t)\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{t/2} \le E\Big|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i\Big|^t \le C_2(t)\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{t/2}.$$

3. Неравенство Марцинкевича-Зигмунда [39]. Если $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независимые с.в. с $E\xi_i=0$, $E|\xi_i|^t<\infty$, $i=1,\dots,n$, $1\le t<\infty$, то имеет место неравенство:

$$D_1(t)(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2)^{t/2} \le E|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|^t \le D_2(t)(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2)^{t/2}.$$

Явные выражения для точных констант известны лишь в неравенствах Хинчина (см. [29]).

Из доказательства неравенств (0.1) и (0.2), приведенного в работе [43], следует лишь, что константы $A(t)$ и $B(t)$ растут не быстрее, чем 2^t при $t\to\infty$.

Используя результаты работ [8], [9], [13], можно получить некоторые улучшения порядка роста 2^t константы $B(t)$. Так, оценка В. В. Сазонова [13] позволяет получить неравенство (0.2) с константой, имеющей порядок роста $2^{t/4}$. Из результатов, полученных в работах [8], [9], следует, что в качестве $B(t)$ можно взять $B(t)=Lt$, где L - некоторая абсолютная постоянная.

Обозначим через $A^*(t)$, $B^*(t)$ точные константы в неравенствах (0.1), (0.2). В. Б. Джонсоном, Г. Шехтманом и Дж. Зинном (W. B. Johnson, G. Schechtman, J. Zinn) [33] было показано, что истинный порядок роста $A^*(t)$ и $B^*(t)$ при $t\to\infty$ есть $t/\ln t$.

Задача определения точных констант $A^*(t)$ и $B^*(t)$ тесно связана с проблемой вычисления экстремумов выпуклого функционала на классе сумм независимых случайных величин. Эта восходящая к работе Ю. В. Прохорова [12] проблема исследовалась в работах [10], [11], [15].

В главе 1 настоящей диссертации найдены явные выражения для точных констант $A^*(t)$ и $B^*(t)$, вычислена их точная асимптотика при $t\to\infty$ и доказаны новые уточнения неравенств (0.1) и (0.2). (параграф 1.5). Кроме того, в этой главе (параграфы 1.2-1.4) решен ряд экстремальных задач для сумм независимых с.в. Формулировка вопросов, рассматриваемых в параграфах 1.2-1.4, восходит к уже упоминавшейся работе Ю. В. Прохорова [12], работам С. А. Утева, И. Ф. Пинелиса, А. Маршалла и И. Олкина (A. Marshall, I. Olkin), В. Геффдинга (W. Hoeffding), С.-Г. Эссеена (C.-G. Esseen) и др. (см. ссылки в главе 1).

При доказательстве основных результатов главы 1 используются идеи

В. Геффдинга [31], А. А. Карра (A. A. Karr) [35], С. А. Утева [15], В. М. Золотарева [4].

Основными результатами главы 1 являются следующие теоремы 1.12-1.15, доказанные в параграфе 1.5.

Теоремами 1.12 и 1.13 даются явные выражения для точных констант $A^*(t)$, $B^*(t)$.

Теорема 1.12. Точная константа в неравенстве (0.1) имеет вид

$A^*(1)=1,$

$A^*(t)=2^{1/t}, \quad 1<t<2,$

$A^*(t)=\|\theta\|_t, \quad t\geq 2,$

где θ - пуассоновская с.в. с параметром 1.

Теорема 1.13. Точная константа в неравенстве (0.2) имеет вид

$B^*(2)=1,$

$B^*(t)=(1+2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})^{1/t}, \quad 2<t<4,$

$B^*(t)=\|\theta_1-\theta_2\|_t, \quad t\geq 4,$

где $\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, θ_1, θ_2 - независимые пуассоновские с.в. с параметром $0{,}5$.

Следствие 1.2. $\lim\limits_{t\to\infty} A^*(t)\ln t/t = \lim\limits_{t\to\infty} B^*(t)\ln t/t = 1/e$.

В главе 1 показано, что утверждения теоремы 1.12 в случае любого $t\geq 1$, и теоремы 1.13 в случае $t\geq 3$ остаются в силе, если рассматриваемые с.в. принимают значения в произвольном гильбертовом пространстве H.

Величины $(A^*(m))^m$ и $(B^*(2m))^{2m}$, $m\in\mathbb{N}$, имеют простой комбинаторный смысл: $(A^*(m))^m=P_m$, где P_m - число различных разбиений множества, состоящего из m элементов (m-е число Белла); $(B^*(2m))^{2m}=Q_{2m}$, где Q_{2m} - число разбиений множества, состоящего из $2m$ элементов, на части, мощности которых суть четные числа.

Применяя метод симметризации, из (0.2) нетрудно получить, что для всех независимых с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ с $E\xi_i=0$, $E|\xi_i|^t<\infty$, $i=1,\dots,n$, $2\leq t<\infty$, справедливо неравенство:

$$B'_1(t)\max((\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\|_2) , (\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_t^t)^{1/t}) \le \|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\|_t \le$$
$$\le B'_2(t)\max((\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\|_2) , (\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_t^t)^{1/t})$$

с константами $B'_1(t)\geq 1/2$ и $B'_2(t)\leq 2B^*(t)$. (см. по этому поводу замечание 1.12 после теоремы 1.13).

Теоремы 1.14 и 1.15 содержат уточнения неравенств Розенталя (0.1) и (0.2). Для с.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $0<s<t<\infty$, обозначим

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad M(s,t,n,\xi)=\max((\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_s^s)^{1/s} , (\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_t^t)^{1/t}) .$$

Теорема 1.14. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые с.в. с конечным t-м моментом, $1<t<\infty$, принимающие значения в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве H . Точные константы во всех моментных неравенствах

$$\|S_n\|_t \le A_1(t)\ M(s,t,n,\xi). \tag{0.3}$$

где $1<t<2,\ 0<s\leq t-1$ или $t\geq 2,\ 0<s\leq 1$, имеют вид $A_1{}^*(t)=\|\theta\|_t$ (θ - пуассоновская с.в. с параметром 1).

Теорема 1.15. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые симметрично распределенные с.в. с конечным t-м моментом, $3\leq t<\infty$, принимающие значения в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве H . Точные константы во всех моментных неравенствах

$$\|S_n\|_t \le B_1(t)\ M(s,t,n,\xi). \tag{0.4}$$

где $3\leq t<4,\ 0<s\leq t-2$ или $t\geq 4,\ 0<s\leq 2$, имеют вид $B_1{}^*(t)=\|\theta_1 - \theta_2\|_t$ (θ_1 , θ_2 - независимые пуассоновские с.в. с параметром $0,5$).

Следует отметить, что неравенства Розенталя

$$\|S_n\|_t \le A^*(t)\ M(1,t,n,\xi) , \qquad \|S_n\|_t \le B^*(t)\ M(2,t,n,\xi)$$

являются наилучшими среди всех неравенств (0.3) и (0.4) в случаях $t\geq 2$ и $t\geq 4$ соответственно. Однако, как показано в конце главы 1, неравенства (0.3) и (0.4) могут быть лучше, чем неравенства Розенталя в случаях $1<t<2$ в теореме 1.14 и $3\leq t<4$ в теореме 1.15.

Доказательство основных теорем 1.12-1.15 в значительной мере опирается на результаты параграфов 1.2-1.4, которые представляют и значительный самостоятельный интерес.

Так, например, параграф 1.2 посвящен изучению экстремальных свойств сумм независимых случайных величин с фиксированной суммой «хвостов» распределений. Результаты этого параграфа обобщают и уточняют результаты работ Ю. В. Прохорова [12], И. Ф. Пинелиса, С. А. Утева [10], С. А. Утева [15].

Для $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ будем писать $(a,n)=(a_1,\dots,a_n)$. Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независимые с.в., $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $\mathcal{F}$ - σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}$, Q - класс конечных положительных σ-аддитивных мер G на $\mathcal{F}$ таких, что $G(\{0\})=0$. Для всякой меры $G\in Q$ через $T(G)$ будем обозначать с.в с характеристической функцией

$$Ee^{iuT(G)} = exp(\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux}-1)dG(x)) .$$

Пусть меры $\lambda,\ \mu,\ \nu \in Q$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d\lambda(x)=0 ,$$

$$\mu(B)=\mu(-B) ,\quad B\in\mathcal{F},$$

$$\nu(B)=\nu(B\cap\mathbb{R}_+) ,\quad B\in\mathcal{F},$$

где $-B=\{-x:\ x\in B\}$. Положим

$$W_1(\lambda)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ E\xi_i=0,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n}P(\xi_i\in B\setminus\{0\})=\lambda(B)\} ,$$

$$W_1(\mu)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ \xi_i \text{ симметрично распределена},\ i=1,\dots,n ,\ \sum_{i=1}^{n}P(\xi_i\in B\setminus\{0\})=\mu(B)\},$$

$$W_1(\nu)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ \xi_i \text{ неотрицательная с.в.},\ i=1,\dots,n ,\ \sum_{i=1}^{n}P(\xi_i\in B\setminus\{0\})=\nu(B)\}.$$

Через $W_2(\lambda)$, $W_2(\mu)$, $W_2(\nu)$ обозначим подмножества $W_1(\lambda)$, $W_1(\mu)$, $W_1(\nu)$ соответственно, состоящие из одинаково распределенных с.в.

Всюду в дальнейшем ϵ - с.в. с распределением

$$P(\epsilon=1)=P(\epsilon=-1)=\tfrac{1}{2} , \tag{0.5}$$

$\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$ - последовательность с.в. с распределением (0.5).

С. А. Утевым [15] доказана следующая

Теорема 1.1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(a) существует константа $C(f)$ такая, что

$$|f(a+b)| \leq C(1+|f(a)|)(1+|f(b)|)$$

для всех $a, b \in \mathbb{R}$,

(b) f дважды дифференцируема и f'' выпукла.

Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, d\lambda(x) < \infty$, то

$$E|f(T(\lambda))| < \infty,$$

$$\sup_{(\xi,n)\in W_1(\lambda)} Ef(S_n) \leq Ef(T(\lambda)).$$

Если, кроме того, функция f неотрицательна, то

$$\sup_{(\xi,n)\in W_i(\lambda)} Ef(S_n) = Ef(T(\lambda)), \quad i=1,2.$$

Замечание 1.1. Из рассуждений С. А. Утева следует, что условие (b) теоремы 1.1 можно заменить на условие

(b′) f - непрерывная функция такая, что

$$f(x)+Ef(a\epsilon_1+b\epsilon_2+x) \geq Ef(a\epsilon_1+x)+Ef(b\epsilon_1+x)$$

для всех $a, b, x \in \mathbb{R}$. В [15] ([15, теорема 1]) показано, что для дважды дифференцируемых функций f условия (b) и (b′) эквивалентны.

Следующий результат параграфа 1.2 показывает, что для случая $W_1(\mu)$ условия теоремы 1.1 можно несколько ослабить.

Теорема 1.2. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (a) и

(c) f непрерывна и

$$Ef(x\epsilon_1)+Ef(a\epsilon_1+b\epsilon_2+x\epsilon_3) \geq Ef(a\epsilon_1+x\epsilon_2)+Ef(b\epsilon_1+x\epsilon_2)$$

для всех $a, b, x \geq 0$,

Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, d\mu(x) < \infty$, то

$$E|f(T(\mu))| < \infty,$$

$$\sup_{(\xi,n)\in W_1(\mu)} Ef(S_n) \leq Ef(T(\mu)).$$

Если, кроме того, функция f неотрицательна, то

$$\sup_{(\xi,n)\in W_i(\mu)} Ef(S_n) = Ef(T(\mu)),\quad i=1,2.$$

Для дважды дифференцируемой функции f условие (c) выполняется тогда и только тогда, когда функция $Ef''(\epsilon x)$ выпукла.

Легко видеть, что функции e^{ux}, $ch\, ux$, $|x|^t$, $((x-u)_+)^t$, $((x-u)_-)^t$, $t\geq 3$, $u\in\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теорем 1.1 и 1.2 ($w_+=max(0,w)$, $w_-=max(0,-w)$, $w\in\mathbb{R}$).

Для неотрицательных с.в. (множество $W_1(v)$) в параграфе 1.2 доказана следующая теорема.

Теорема 1.3. Пусть $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (a) и

(d) f непрерывна и выпукла.

Если $\int_0^\infty |f(x)|\,dv(x) < \infty$, то

$E|f(T(v))| < \infty$,

$$\sup_{(\xi,n)\in W_1(v)} Ef(S_n) \leq Ef(T(v)).$$

Если, кроме того, функция f неотрицательна, то

$$\sup_{(\xi,n)\in W_i(v)} Ef(S_n) = Ef(T(v)),\quad i=1,2.$$

Нетрудно проверить, что функции e^{ux}, $ch\, ux$, x^t, $((x-u)_+)^t$, $((x-u)_-)^t$, $t\geq 1$, $u\in\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3.

Пусть $X_1(p_1),\dots,X_n(p_n)$ - независимые с.в с распределениями Бернулли:

$P(X_i(p_i)=1)=p_i$, $P(X_i(p_i)=0)=1-p_i$, $i=1,\dots,n$,

$Y_1(p_1),\dots,Y_n(p_n)$ - независимые с.в. с распределениями:

$P(Y_i(p_i)=1)=P(Y_i(p_i)=-1)=p_i/2$, $P(Y_i(p_i)=0)=1-p_i$, $i=1,\dots,n$.

Из теорем 1.2, 1.3 следует, что если $f_1\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (a) и (d), $f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (a) и (c), то $E|f_1(\theta(s))| < \infty$, $E|f_2(\theta_1(s)-\theta_2(s))| < \infty$,

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)) \le Ef_1(\theta(s)),$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)) \le Ef_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)).$$

Если, кроме того, функции f_1 и f_2 неотрицательны, то

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)) = \sup_{n} Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)) = Ef_1(\theta(s)), \tag{0.6}$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)) = \sup_{n} Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)) = Ef_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)). \tag{0.7}$$

В частности,

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i))^t = \sup_{n} E(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n))^t = E\theta^t(s),$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E((\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)-u)_+)^t = \sup_{n} E((\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)-u)_+)^t = E((\theta(s)-u)_+)^t \tag{0.8}$$

для $t\ge 1$, $u\in\mathbb{R}$,

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E|\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i))|^t = \sup_{n} E|\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n))|^t = E|\theta_1(s)-\theta_2(s)|^t,$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E((\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)-u)_+)^t = \sup_{n} E((\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)-u)_+)^t = E((\theta_1(s)-\theta_2(s)-u)_+)^t \tag{0.9}$$

для $t\ge 3$, $u\in\mathbb{R}$. Используя соотношения (0.8), (0.9) и неравенство Чебышева, получаем следующие верхние оценки для хвостовых вероятностей с.в. $\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)$ и $\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)$, которые напоминают неравенства, доказанные М. Л. Итоном (M. L. Eaton) в работе [26].

Следствие 1.1. Для всех $a>0$, $(p,n)\in H(s)$ справедливы следующие неравенства:

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)\ge a) \le \inf_{0\le u<a} \int_u^{\infty} ((x-u)/(a-u))d\pi_1(x),$$

$$P(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i) \geq a) \leq \inf_{0 \leq u < a} \int_u^{\infty} ((x-u)^3/(a-u)^3) d\pi_2(x),$$

где $\pi_1(x)$ и $\pi_2(x)$ - функции распределения с.в. $\theta(s)$ и $\theta_1(s)$-$\theta_2(s)$ соответственно.

Параграф 1.3 посвящен изучению условий вогнутости по Шуру некоторых функционалов, заданных на суммах независимых дискретных с.в. В этом параграфе доказаны аналоги результатов работ В. Геффдинга [32], С. Карлина, А. Новикова (S. Karlin, A. Novikoff) [34], А. Маршалла и И. Олкина [7], посвященных исследованию вогнутости по Шуру функционалов от с.в. $X_i(p_i)$, для функционалов от с.в. $Y_i(p_i)$.

В. Геффдингом [32] получен следующий результат:

если $f:\{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ - выпуклая функция, $s = \sum_{i=1}^{n} p_i$, то

$$Ef(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)) \leq Ef(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)). \tag{0.10}$$

Поскольку

$$(s/n, s/n, \dots, s/n) \prec (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

то неравенство (0.10) является специальным случаем следующей теоремы, полученной С. Карлином и А. Новиковым [34] (см. также [7, стр. 366]).

Теорема 1.4. Если $f: \{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ - выпуклая функция, то

$$g(p) = Ef(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i))$$

является S-вогнутой функцией от $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Следующий результат доказан А. Маршаллом и И. Олкиным [7, стр. 366].

Теорема 1.5. Пусть $R_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Если $f: \{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям $f(0) \leq \dots \leq f(n-1)$, то

$$g(R) = Ef(\sum_{i=1}^{n} X_i(\exp(-R_i)))$$

является S-выпуклой функцией от $R = (R_1, \dots, R_n)$.

Для с.в. $Y_i(p_i)$ в параграфе 1.3 получены формулируемые ниже теоремы 1.6 и 1.7.

Теорема 1.6. Если функция $f: \{0, \pm 1, \dots, \pm n\} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$E(f(2+\epsilon x) - 4f(1+\epsilon x) + 6f(\epsilon x) - 4f(-1+\epsilon x) + f(-2+\epsilon x)) \geq 0$$

для всех $x \in \{0, 1, \dots, (n-2)\}$, то

$$g(p) = Ef(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i))$$

является S-вогнутой функцией от $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Легко проверить, что любая функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (c), удовлетворяет также условиям теоремы 1.6.

Теорема 1.7. Пусть $R_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Если $f: \{0, \pm 1, \dots, \pm n\} \to \mathbb{R}$ - выпуклая функция, то

$$g(R) = Ef(\sum_{i=1}^{n} Y_i(\exp(-R_i)))$$

является S-выпуклой функцией от $R = (R_1, \dots, R_n)$.

Пусть M_1 - класс неотрицательных непрерывных выпуклых функций f_1: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (a) из параграфа 1.2, M_2 - класс неотрицательных дважды дифференцируемых функций f_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (a), для которых $Ef''(\epsilon x)$ - выпуклая функция. Нетрудно видеть, что если $f_1 \in M_1$, $f_2 \in M_2$, то $f_1^2 \in M_1$, $f_2^2 \in M_2$. Применяя соотношения (0.6) и (0.7), получаем, что

$$\sup_n Ef_1^2(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)) = Ef_1^2(\theta(s)) < \infty,$$

$$\sup_n Ef_2^2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)) = Ef_2^2(\theta_1(s) - \theta_2(s)) < \infty,$$

то есть последовательности

$$\{f_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n))\}_{n=1}^{\infty} \tag{0.11}$$

и

$$\{f_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n))\}_{n=1}^{\infty} \tag{0.12}$$

равномерно интегрируемы. Доказанная в параграфе 1.3 теорема 1.8 показывает, что соотношения (0.6) и (0.7) остаются справедливыми, если условие (а) заменено на более слабые условия равномерной интегрируемости последовательностей (0.11) и (0.12).

Теорема 1.8. Если f_1: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и выпуклая на $Z_+ = \{0,1,2,..\}$ функция, для которой последовательность

$$\{ | f_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n) | \}_{n=1}^{\infty}$$

равномерно интегрируема и $E | f_1(\theta(s)) | < \infty$, то справедливо соотношение (0.6). Если f_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, для которой последовательность

$$\{ | f_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)) | \}_{n=1}^{\infty}$$

равномерно интегрируема, и

$$E(f(2+\epsilon x)-4f(1+\epsilon x)+6f(\epsilon x)-4f(-1+\epsilon x)+f(-2+\epsilon x)) \geq 0$$

для всех $x \in \{0,1,2,...\}$, $E | f_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)) | < \infty$, то справедливо соотношение (0.7).

Доказательство теоремы 1.8, ослабляющей условия справедливости соотношений (0.6) и (0.7), в значительной мере опирается на теоремы 1.4 и 1.6, имеющие теоретико-мажоризационную структуру. Такой подход, на наш взгляд, проливает больше света на природу соотношений (0.6), (0.7), чем их вывод из теорем 1.2 и 1.3.

Параграф 1.4 посвящен вычислению экстремумов некоторых функционалов, заданных на суммах независимых симметрично распределенных и неотрицательных случайных величин, принимающих значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Пусть $\xi_1,...,\xi_n$ - независимые с.в. с конечным t-м моментом, принимающие значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$, $0<s<t<\infty$. Зафиксируем величины $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i^t \leq b_i$, $i=1,...n$, A, D_s, $M \geq 0$. Положим

$$M_1(n,s,t,a,b,H) = \{(\xi,n): E\|\xi_i\|^s = a_i^s,\ E\|\xi_i\|^t = b_i,\ i=1,...,n\},$$

$$M_2(n,s,t,a,b,H)=\{(\xi,n): E\|\xi_i\|^s\le a_i^s,\ E\|\xi_i\|^t\le b_i,\ i=1,\dots,n\},$$

$$U_1(s,t,A,D_s,H)=\{(\xi,n): n\ge 1,\ (\sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^s)^{1/s}=D_s,\ \sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^t=A\},$$

$$U_2(s,t,A,D_s,H)=\{(\xi,n): n\ge 1,\ (\sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^s)^{1/s}\le D_s,\ \sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^t\le A\},$$

$$U(s,t,M,H)=\{(\xi,n): n\ge 1,\ \max((\sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^s)^{t/s},\ \sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^t)=M\}.$$

Через $U_3(s,t,A,D_s,H)$ и $U_4(s,t,A,D_s,H)$ обозначим подмножества $U_1(s,t,A,D_s,H)$ и $U_2(s,t,A,D_s)$ соответственно, состоящие из одинаково распределенных с.в. Пусть $M_{1i}(n,s,t,a,b,H)$, $i=1,2$, $U_{1j}(s,t,A,D_s,H)$, $j=1,2,3,4$, $U_1(s,t,M,H)$ - подмножества $M_i(n,s,t,a,b,H)$, $i=1,2$, $U_j(s,t,A,D_s,H)$, $j=1,2,3,4$, $U(s,t,M,H)$ соответственно, состоящие из неотрицательных с.в., $M_{2i}(n,s,t,a,b,H)$, $i=1,2$, $U_{2j}(s,t,A,D_s,H)$, $j=1,2,3,4$, $U_2(s,t,M,H)$ - их подмножества, состоящие из симметрично распределенных с.в. Пусть $\theta(A,D_s)$ - пуассоновская с.в. с параметром $(D_s^t/A)^{s/(t-s)}$, $\theta_1(A,D_s)$, $\theta_2(A,D_s)$ - независимые пуассоновские с.в. с параметром $\frac{1}{2}(D_s^t/A)^{s/(t-s)}$, $U_1(a_1,b_1,s,t),\dots,U_n(a_n,b_n,s,t)$ - независимые с.в. с распределением

$$P(U(a,b,s,t)=0)\ =\ 1-(a^t/b)^{s/(t-s)},\quad P(U(a,b,s,t)=(b/a^s)^{1/(t-s)})\ =\ (a^t/b)^{s/(t-s)},$$

$V_1(a_1,b_1,s,t),\dots,V_n(a_n,b_n,s,t)$ - независимые с.в. с распределением

$$P(V(a,b,s,t)=0)\ =\ 1-(a^t/b)^{s/(t-s)},$$

$$P(V(a,b,s,t)=(b/a^s)^{1/(t-s)})\ =\ P(V(a,b,s,t)=-(b/a^s)^{1/(t-s)})\ =\ \tfrac{1}{2}(a^t/b)^{s/(t-s)}.$$

Обозначим

$$F_1(a,b,n,s,t)=E(\sum_{i=1}^n U_i(a_i,b_i,s,t))^t,$$

$$G_1(a,b,n,t)=\sum_{i=1}^n (b_i-a_i^t)+(\sum_{i=1}^n a_i)^t,$$

$$F_2(a,b,n,s,t)=E\,|\sum_{i=1}^n V_i(a_i,b_i,s,t)|^t,$$

$$G_2(a,b,n,t)=\sum_{i=1}^n (b_i-a_i^t)+E\,|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i|^t.$$

Положим $n_0=n_0(A,D_s)=\min\{n\in\mathbb{N}: An^{t/s-1}\ge D_s^t\}$.

Доказательство основных результатов главы 1 настоящей диссертации существенно использует следующие теоремы 1.9 и 1.10, которые являются обобщениями результатов работ [10], [12], [15].

Теорема 1.9. Если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{1k}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} ES_n^t = F_1(a,b,n,s,t),\ k=1,2, \tag{0.13}$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{1k}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = (A/D_s^s)^{t/(t-s)}E\theta^t(A,D_s),\ k=1,2,3,4, \tag{0.14}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{11}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} ES_n^t = G_1(a,b,n,t). \tag{0.15}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{13}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = A+D_s^t(n_0^{t-t/s}-n_0^{1-t/s}). \tag{0.16}$$

Если $1<t<2$, $1\leq s<t$ или $t\geq 2$, $t-1\leq s<t$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{1k}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} ES_n^t = G_1(a,b,n,t),\ k=1,2, \tag{0.17}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{11}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} ES_n^t = F_1(a,b,n,s,t),$$

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{13}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = E\Big(\sum_{i=1}^{n_0} U_i(D_s n_0^{-1/s}, An_0^{-1}, s,t)\Big)^t. \tag{0.18}$$

Если $1<t<2$, $s=1$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{1k}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = A+D_1^t,\ k=1,2,3,4. \tag{0.19}$$

Если $t>1$, $s=1$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{11}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = \max(A, D_1^t). \tag{0.20}$$

Соотношения (0.15), (0.16), (0.20) для $t\geq 2$, $s=1$ являются следствиями леммы 9.3 в работе С. А. Утева [15], и ее доказательства.

Следующая теорема обобщает теорему 5 вышеупомянутой работы.

Теорема 1.10. Если $2<t<4$, $0<s\le t-2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{2k}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} E|S_n|^t = F_2(a,b,n,s,t), \quad k=1,2, \tag{0.21}$$

Если $3\le t<4$, $0<s\le t-2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2k}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t = (A/D_s^{\,s})^{t/(t-s)}E|\theta_1(A,D_s)-\theta_2(A,D_s)|^t, \quad k=1,2,3,4, \tag{0.22}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{21}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} E|S_n|^t = G_2(a,b,n,t). \tag{0.23}$$

Если $2<t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t-2\le s<t$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{2k}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} E|S_n|^t = G_2(a,b,n,t), \quad k=1,2, \tag{0.24}$$

Если $3\le t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t-2\le s<t$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{21}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} E|S_n|^t = F_2(a,b,n,s,t). \tag{0.25}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t = E\,\Big|\sum_{i=1}^{n_0} V_i(D_s n_0^{-1/s}, An_0^{-1},s,t)\Big|^t. \tag{0.26}$$

Если $2<t<4$, $s=2$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2k}(2,t,A,D_2,\mathbf{R})} ES_n^{\,t} = A+(2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2}))D_2^{\,t}, \quad k=1,2,3,4. \tag{0.27}$$

Если $t\ge 4$, $s=2$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(2,t,A,D_2,\mathbf{R})} E|S_n|^t = A+(n_0^{-t/2}E|\sum_{i=1}^{n_0}\epsilon_i|^t-n_0^{1-t/2})D_2^{\,t}. \tag{0.28}$$

Полагая $k=1$, $n=2$, $t=3$, $s=1$ в (0.23) и $k=1$, $n=2$, $t=3$, $s=2$ в (0.24), получаем, что для всех независимых с.в. X и Y с одинаковым симметричным распределением и конечным третьим моментом справедливы следующие неравенства, константы в которых оптимальны:

$$2E|X|^3 + 2(E|X|)^3 \le E|X+Y|^3 \le 2E|X|^3 + 2(EX^2)^{3/2}, \tag{0.29}$$

$$2E|X|^3 + 2(E|X|)^3 \le E|X\text{-}Y|^3 \le 2E|X|^3 + 2(EX^2)^{3/2} . \tag{0.30}$$

Неравенства (0.29) и правое неравенство (0.30) были доказаны С.-Г. Эссееном (C.-G. Esseen) [27] при более слабом условии $EX=0$. Интересно отметить, что в отличие от левого неравенства (0.29) точная нижняя граница для $E|X+Y|^3$ при условии $EX=0$ имеет вид $2E|X|^3 + 1.5(E|X|)^3$. Теорема 1.10 дополняет также результаты Д. Дж. Дейли (D. J. Daley) [23].

Нетрудно показать, что соотношения (0.13), (0.14), (0.17), (0.19) при $t\ge 1$ и соотношения (0.21), (0.22), (0.24), (0.27) при $t\ge 3$ остаются справедливыми и в случае, когда рассматриваемые с.в. принимают значения в произвольном гильбертовом пространстве H .

Следующая теорема обобщает теорему 7 работы [15].

Теорема 1.11. 1) Пусть $dim\, H=n$. Если $2<t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{21}(n,s,t,a,b,H)} E|S_n|^t = \sum_{i=1}^{n} (b_i\text{-}a_i^t) + (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{t/2} . \tag{0.31}$$

Если $2<t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{21}(n,s,t,a,b,H)} E|S_n|^t = E(\sum_{i=1}^{n} U_i(a_i^2,b_i,s/2,t/2) . \tag{0.32}$$

2) Пусть $dim\, H=\infty$. Если $2<t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A,D_s,H)} E|S_n|^t = A+D_s^t(n_0^{t/2\text{-}t/s}\text{-}n_0^{1\text{-}t/s}) . \tag{0.33}$$

Если $2<t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A,D_s,H)} E|S_n|^t = E\,(\sum_{i=1}^{n_0} U_i(D_s^2 n_0^{-2/s},An_0^{-1},s/2,t/2)\,)^{t/2} . \tag{0.34}$$

Если $t>2$, $s=2$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{21}(2,t,A,D_2,H)} E|S_n|^t = \max\,(A,\, D_2^t) . \tag{0.35}$$

Правая часть соотношений (0.31) для $2<t<4$, $0<s\le t-2$ и $t\ge 4$, $0<s\le 2$, (0.32) для $3\le t<4$, $0<s\le t-2$ и $t\ge 4$, $0<s\le 2$, (0.33) для $t\ge 4$, $s=2$, (0.34) для $3\le t<4$, $2\le s<t$ и $t\ge 4$, $t-2\le s<t$ заведомо меньше, чем правые части (0.23), (0.25), (0.28), (0.26) соответственно. Интересно отметить, что в отличие от отыскания супремумов (соотношения (0.13), (0.14), (0.17), (0.19), (0.21), (0.22), (0.24), (0.27)) инфимумы по классам $U_{13}(s,t,A,D_1,\mathbb{R})$, $U_{23}(2,t,A,D_2,H)$, где рассматриваются только одинаково распределенные с.в. (соотношения (0.16), (0.19), (0.33), (0.34)), меньше, чем инфимумы по всем классам $U_{11}(s,t,A,D_1,\mathbb{R})$, $U_{21}(2,t,A,D_2,H)$ (соотношения (0.20), (0.35)).

Перейдем теперь к формулировке и обсуждению основных результатов главы 2.

Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независимые с.в. с $E\xi_i=0$, $E|\xi_i|^t<\infty$, $i=1,\dots,n$, $1\le t<\infty$. Из неравенства Марцинкевича-Зигмунда, используя элементарное соотношение

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i|^t \le n^{t-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i|^t,$$

легко получить, что

$$E|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|^t \le D_2(t)\, n^{t/2-1}\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^t. \tag{0.36}$$

В ряде работ содержатся обобщения неравенства (0.36) на случай симметрических статистик (см. [6], [20], [48]). Так, из теоремы 2.1.4 работы [6] следует, в частности, что для всех симметрических статистик второго порядка

$$T_n = \sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y(Xi_1,Xi_2)$$

от независимых одинаково распределенных с.в. $X_1,\dots,X_n$, ядро которых удовлетворяет условиям

$$E(Y(X_1,X_2)/X_1)=0,\quad E|Y(X_1,X_2)|^t<\infty,\ t>2, \tag{0.37}$$

имеет место неравенство

$$E|T_n|^t \le B(t)\, n^t E|Y(X_1,X_2)|^t.$$

Хотя это неравенство довольно часто используется, оно, равно как и неравенство (0.36), является неточным в том смысле, что не существует универсальной положительной константы $A(t)$ такой, что

$$E|T_n|^t \geq A(t)\, n^t E|Y(X_1,X_2)|^t$$

для любой симметрической статистики T_n с ядром, удовлетворяющим условиям (0.37).

Впервые двусторонние оценки одинакового порядка для симметрических статистик

$$T_n = \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} Y(Xi_1,Xi_2)\,,$$

являющиеся аналогами неравенств Розенталя, Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда, были получены в работах Ш. Шарахметова [16] и [17].

5. Аналоги неравенств Розенталя для симметрических статистик второго порядка от независимых одинаково распределенных с.в. [16], [17]. Если $t\geq 2$, $X_1,\ldots,X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в., $Y\colon \mathscr{E}^2\to\mathbb{R}$ - симметрическая функция, удовлетворяющая условиям (0.37), то имеют место неравенства

$$A(t)\max(n^2E|Y(X_1,X_2)|^t,\ n^{t/2+1}E(E(Y^2(X_1,X_2)/X_1))^{t/2}, n^t(EY^2(X_1,X_2))^{t/2}) \leq$$
$$E|T_n|^t \leq B(t)\max(n^2E|Y(X_1,X_2)|^t,\ n^{t/2+1}E(E(Y^2(X_1,X_2)/X_1))^{t/2}, n^t(EY^2(X_1,X_2))^{t/2})\,.$$

6. Аналоги неравенств Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда для симметрических статистик второго порядка от независимых одинаково распределенных с.в. [16], [17]. Если $t\geq 2$, $X_1,\ldots,X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в., $Y\colon \mathscr{E}^2\to\mathbb{R}$ - симметрическая функция, удовлетворяющая условиям (0.37), то имеют место неравенства

$$A(t)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} Y^2(Xi_1,Xi_2)\Big)^{t/2} \leq E|T_n|^t \leq B(t)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} Y(Xi_1,Xi_2)\Big)^{t/2}.$$

Касательно моментных неравенств для симметрических статистик второго порядка от независимых одинаково распределенных с.в. следует отметить также работы А. Л. Алешкявичене [1], [18], которая получила оценку

$$E|T_n|^k \leq \sum_{r=0}^{k-2} n^{k-r}(2k)^{k+r}(E|Y(X_1,X_2)|^{r+2})^{3/(r+2)}(E|Y(X_1,X_2)|^3)^{(k-r-2)/3}\,,\quad k=1,2,\ldots$$

(см. лемму 2 в [1], лемму 3 в [18] и их доказательство).

Вторая глава диссертации посвящена обобщению результатов Ш. Шарахметова в нескольких важных направлениях. Во-первых, здесь вместо статистик второго порядка рассматриваются статистики произвольного порядка. Во-вторых, опускается условие одинаковой распределенности с.в. $X_1,\dots,X_n$. В-третьих, исследуется случай, когда ядро симметрической статистики зависит от индексов суммирования. Более того, параграф 2.5 главы 2 посвящен доказательству аналогов неравенств Розенталя, Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда для многовыборочных симметрических статистик с ядром, зависящим от индексов суммирования, от различно распределенных в каждой выборке с.в., что практически охватывает все известные обобщения симметрических статистик. Аналоги неравенств Хинчина, Марцинкевича-Зигмунда и Розенталя, полученные в главе 2, могут найти применение исследовании предельного поведения линейных и нелинейных статистик, изучении функционалов от оценок Парзена-Розенблатта для плотности вероятности, а также в многомерном стохастическом интегрировании, гармоническом анализе, теории операторов, квантовой механики, в теории измерения неравенства дохода и разнообразия видов и др. (см. [6], [21], [22], [37], [41], [44]-[46], [48], [50] для более полной информации).

Наиболее общие результаты этой главы содержатся в параграфах 2.4 и 2.5.

Параграф 2.4 содержит аналоги неравенств Розенталя, Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда для симметрических статистик произвольного порядка с переменным ядром от независимых различно распределенных случайных величин.

Пусть $X_1,\dots,X_n$ - независимые, не обязательно одинаково распределенные случайные величины (с.в.), принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathscr{X}, A)$, $1 \le m \le n$, $t \ge 1$.

Пусть $F(t,m)$ - класс функций $Y_{i_1,\dots,i_m}: \mathscr{X}^m \to \mathbb{R}$, $1 \le i_k \le n$, $i_r \ne i_s$, $r \ne s$, $k,r,s = 1,\dots,m$, удовлетворяющих условиям

$$E\,|\,Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})\,|^t < \infty ,$$

$$Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m}) = Y_{i_{\pi(1)},\dots,i_{\pi(m)}}(X_{i_{\pi(1)}},\dots,X_{i_{\pi(m)}}) \quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\dots,m\}$.

Через $G(t,m)$ будем обозначать подмножество $F(t,m)$, состоящее из функций Y , для которых

$$E(Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})/X_{i_{\pi(1)}},\dots,X_{i_{\pi(m-1)}})=0 \quad (\text{п.н.})$$

для всех $1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\dots,m\}$.

Пусть $G'(t,m)$ - подмножество $G(t,m)$, состоящее из функций Y, для которых с.в. $Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})$ условно симметрично распределены на σ-алгебре $\sigma(X_{i_{\pi(1)}},\dots,X_{i_{\pi(m-1)}})$ для всех $1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\dots,m\}$ (говорят, что с.в. X условно симметрично распределена на σ-алгебре $\mathcal{F}$, если для любого $a\ge 0$ $P(X>a/\mathcal{F})=P(X<-a/\mathcal{F})$).

Для $Y\in F(t,m)$ положим

$$T_{n,m} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le n} Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_m}) .$$

Для $1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le n$ будем писать $Y(i_1,\dots,i_m)=Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.7. Если $Y_{i_1,\dots,i_m}\colon \mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\le i_k\le n$, $i_r\ne i_s$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\dots,m$, - неотрицательные функции, принадлежащие классу $F(t,m)$, $t\ge 1$, то

$$\max_{k=0,m}\ \max_{1\le j_1<\dots<j_k\le m}\ \sum_{1\le ij_1<\dots<ij_k\le n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} E(Y(i_1,\dots,i_m)/X_{ij_1},\dots,X_{ij_k})\Big)^t \le$$

$$\le ET^{t}_{n,m} \le$$

$$\le B(t,m)\max_{k=0,m}\ \max_{1\le j_1<\dots<j_k\le m}\ \sum_{1\le ij_1<\dots<ij_k\le n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} E(Y(i_1,\dots,i_m)/ X_{ij_1},\dots,X_{ij_k})\Big)^t. \tag{0.38}$$

Теорема 2.8. Если $Y_{i_1,\dots,i_m}\colon \mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\le i_k\le n$, $i_r\ne i_s$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\dots,m$, - функции, принадлежащие классу $G(t,m)$, $t\ge 2$, то

$$A(t,m)\max_{k=0,m}\ \max_{1\le j_1<\dots<j_k\le m}\ \sum_{1\le ij_1<\dots<ij_k\le n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} E(Y^2(i_1,\dots,i_m)/X_{ij_1},\dots,X_{ij_k})\Big)^{t/2} \le$$

$$\le E|T_{n,m}|^t \le$$

$$\leq B(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq m} \sum_{1\leq ij_1<\ldots<ij_k\leq n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\ldots,j_k,\\ 1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k}))^{t/2}. \qquad (0.39)$$

Теорема 2.9. Если $Y_{i_1,\ldots,i_m}$: $\mathcal{X}^m\to\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, - функции, принадлежащие классу $G(t,m)$, $t\geq 1$, то

$$A(t,m)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2} \leq E\,|\,T_{n,m}|^t$$

при $t\geq 2$,

$$E\,|\,T_{n,m}|^t \leq B(t,m)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2}$$

при $t\geq 1$. Если $Y_{i_1,\ldots,i_m}$: $\mathcal{X}^m\to\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, - функции, принадлежащие классу $G'(t,m)$, $t>0$, то

$$E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2} \leq E\,|\,T_{n,m}|^t$$

при $t\geq 2$,

$$E\,|\,T_{n,m}|^t \leq B(t,m)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2}$$

при $t>0$, причем $B(t,m)=1$ для $0<t\leq 1$.

Теоремы 2.7-2.9 для симметрических статистик произвольного порядка от независимых одинаково распределенных с.в. и симметрических статистик второго порядка с ядром, зависящим от индексов суммирования, от независимых различно распределенных с.в. содержатся в параграфах 2.2 и 2.3. В параграфе 2.2 приведен также пример, показывающий, что, вообще говоря, каждый член в выражении, участвующем в аналоге неравенства Розенталя для симметрических статистик, является существенным.

Из теорем 2.7-2.9 вытекают следующие аналоги неравенств Розенталя, Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда для полилинейных форм.

Следствие 2.7. Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые неотрицательные с.в. с $EX_k^t < \infty$, $k=1,\ldots,n$, $t \geq 1$, то

$$\max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq m} \sum_{1\leq i_{j_1}<\ldots<i_{j_k}\leq n} \prod_{l=1}^{k} EX^t_{i_{j_l}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\ldots,j_k, \\ 1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}} \prod_{\substack{l\neq j_1,\ldots,j_k \\ l=1,\ldots,m}} EX_{i_l} \Big)^t \leq E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} X_{i_1}\ldots X_{i_m} \Big)^t \leq$$

$$\leq B(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq m} \sum_{1\leq i_{j_1}<\ldots<i_{j_k}\leq n} \prod_{l=1}^{k} EX^t_{i_{j_l}} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\ldots,j_k, \\ 1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}} \prod_{\substack{l\neq j_1,\ldots,j_k \\ l=1,\ldots,m}} EX_{i_l} \Big)^t .$$

Следствие 2.8. Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые с.в. с $EX_k=0$, $E|X_k|^t<\infty$, $k=1,\ldots,n$, $t\geq 2$, то

$$A(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq m} \sum_{1\leq i_{j_1}<\ldots<i_{j_k}\leq n} \prod_{l=1}^{k} E|X_{i_{j_l}}|^t \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\ldots,j_k, \\ 1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}} \prod_{\substack{l\neq j_1,\ldots,j_k \\ l=1,\ldots,m}} EX^2_{i_l} \Big)^{t/2} \leq E\Big| \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} X_{i_1}\ldots X_{i_m} \Big|^t \leq$$

$$\leq B(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq m} \sum_{1\leq i_{j_1}<\ldots<i_{j_k}\leq n} \prod_{l=1}^{k} E|X_{i_{j_l}}|^t \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\ldots,j_k, \\ 1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}} \prod_{\substack{l\neq j_1,\ldots,j_k \\ l=1,\ldots,m}} EX^2_{i_l} \Big)^{t/2} .$$

Следствие 2.9. Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые с.в. с $EX_k=0$, $E|X_k|^t<\infty$, $k=1,\ldots,n$, $t\geq 2$, то

$$A(t,m)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} X^2_{i_1}\ldots X^2_{i_m} \Big)^{t/2} \leq E\Big| \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} X_{i_1}\ldots X_{i_m} \Big|^t \leq$$

$$\le B(t,m)\, E\,(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} X_{i_1}^2\ldots X_{i_m}^2\,)^{t/2} \ .$$

Параграф 2.5 содержит аналоги неравенств Розенталя и Марцинкевича-Зигмунда для многовыборочных статистик.

Рассмотрим c независимых серий $\{X_{j1},\ldots,X_{jn(j)}\}$, $j=1,\ldots,c$, независимых с.в. Все величины из j-й серий принимают значения в измеримом пространстве $(\mathcal{E}_j\, ,\, A_j)$. Пусть $1 \le m(j) \le n(j)$, $m=(m(1),\ldots,m(c))$, $n=(n(1),\ldots,n(c))$.

Пусть $K(t,m)$ - класс функций

$Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c):\ \mathcal{E}_1^{m(1)} \times\ldots\times \mathcal{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R}$,

$1\le i_{jk}\le n_j$, $i_{jr}\neq i_{js}$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,m(j)$, $j=1,\ldots,c$, удовлетворяющих условиям

$E\,|\,Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)\,|^{\,t}<\infty$,

$Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)=$

$=Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,k,\ i_{kr},\ r=\pi_k(1),\ldots,\pi_k(m(k)),i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=k+1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),$
$j=1,\ldots,k,\ X_{ka},\ \ a=ik\pi_k(1),\ldots,ik\pi_k(m(k)),X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=k+1,\ldots,c)$

для всех $1\le i_{j1}<i_{j2}<\ldots<ijm(j)\le n(j)$, $j=1,\ldots,c$, и всех перестановок π_k множества $\{1,2,\ldots,m(k)\}$, $k=1,\ldots,c$. Через $L(t,m)$ будем обозначать подмножество $K(t,m)$, состоящее из функций Y , для которых

$E(Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)/X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,k,\ X_{ka},$
$a=ik\pi_k(1),\ldots,ik\pi_k(m(k)\text{-}1),X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=k+1,\ldots,c)$

для всех $1\le i_{j1}<i_{j2}<\ldots<ijm(j)\le n(j)$, $j=1,\ldots,c$, и всех перестановок π_k множества $\{1,2,\ldots,m(k)\}$, $k=1,\ldots,c$.

Рассмотрим многовыборочную симметрическую статистику с переменным ядром

$$W_{n,m,c} = \sum Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)\ ,$$

где суммирование осуществляется по всем $1\le i_{j1}<i_{j2}<\ldots<ijm(j)\le n(j)$, $j=1,\ldots,c$.

Теорема 2.10. Если

$Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c):\ \mathcal{E}_1^{m(1)} \times\ldots\times \mathcal{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R}$,

$1\le i_{jk}\le n(j)$, $i_{jr}\neq i_{js}$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,m(j)$, - неотрицательные функции, принадлежащие классу $K(t,m)$, $t\ge 1$, то

$$\max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \ \max_{\substack{1\le l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\le m(1)\\ \dots\\ 1\le l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\le m(c)}} \ \sum_{\substack{1\le i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\le n(1)\\ \dots \\ 1\le icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\le n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\ne l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\le i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\le n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\Big($$

$$Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja}, a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c)^t \le$$

$$\le EW_{n,m,c}{}^t \le$$

$$\le B(t,m,c) \max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \ \max_{\substack{1\le l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\le m(1)\\ \dots\\ 1\le l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\le m(c)}} \ \sum_{\substack{1\le i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\le n(1)\\ \dots \\ 1\le icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\le n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\ne l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\le i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\le n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\Big($$

$$Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja}, a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c)^t\ .$$

Теорема 2.11. Если

$$Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c):\ \mathcal{E}_1^{m(1)} \times\dots\times \mathcal{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R}\ ,$$

$1\le i_{jk}\le n(j)$, $i_{jr}\ne i_{js}$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\dots,m(j)$, - функции, принадлежащие классу $L(t,m)$, $t\ge 2$, то

$$A(t,m,c) \max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \ \max_{\substack{1\le l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\le m(1)\\ \dots\\ 1\le l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\le m(c)}} \ \sum_{\substack{1\le i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\le n(1)\\ \dots \\ 1\le icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\le n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\ne l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\le i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\le n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\Big($$

$$Y^2(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c)^{t/2} \le$$

$$\le E\,|\,W_{n,m,c}\,|^t \le$$

$$\le B(t,m,c) \max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \ \max_{\substack{1\le l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\le m(1)\\ \dots\\ 1\le l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\le m(c)}} \ \sum_{\substack{1\le i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\le n(1)\\ \dots \\ 1\le icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\le n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\ne l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\le i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\le n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\Big($$

$$Y^2(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja}, a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c)^{t/2}\ .$$

Теорема 2.12. Если

$$Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c):\ \mathcal{E}_1^{m(1)} \times\dots\times \mathcal{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R}\ ,$$

$1\le i_{jk}\le n(j)$, $i_{jr}\ne i_{js}$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\dots,m(j)$, - функции, принадлежащие классу $L(t,m)$, $t\ge 2$, то

$$A(t,m,c)\ E\Big(\ \sum\ Y^2(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)\ \Big)^{t/2} \le$$

$\leq E|W_{n,m,c}|^t \leq$

$$\leq B(t,m,c)\, E(\ \sum \ Y^2(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)\ )^{t/2}\ .$$

Как следствие результатов для симметрических статистик, в параграфе 2.6 доказан ряд моментных неравенств для U-статистик. Здесь же приведены примеры, в которых эти неравенства применяются для оценивания моментов конкретных U-статистик.

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ - независимые с.в., принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathscr{E}, A)$ и имеющие на нем одно и тоже распределение P, которое может, вообще говоря, зависеть от n (такое допущение позволяет охватить U-статистики от схем-серий независимых с.в.), $\mathcal{P}=\{P\}$ - некоторый класс вероятностных распределений на $(\mathscr{E}, A)$. Пусть, далее,

$\theta\colon \mathcal{P}\to\mathbb{R}$,

$$\theta(P)=\int\ldots\int \Phi(x_1,\ldots,x_m)P(dx_1)\ldots P(dx_m) \ -$$

параметрический функционал с симметрическим ядром $\Phi\colon\mathscr{E}^m\to\mathbb{R}$, которое также может быть переменным, то есть зависеть от n .

$$U_n=\binom{n}{m}^{-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}\Phi(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})\ -$$

U-статистика, являющуюся симметрической несмещенной оценкой $\theta(P)$.

Теорема 2.13. Если $\Phi\colon\mathscr{E}^m\to\mathbb{R}$ - неотрицательная функция, для которой $E\Phi^t(X_1,\ldots,X_m)<\infty,\ t\geq 1$, то

$$\binom{n}{m}^{-t}\max_{k=1,m-1}\Bigg(\binom{n}{m}E\Phi^t(X_1,\ldots,X_m)\ ,\ \binom{n}{m}^t(E\Phi(X_1,\ldots,X_m))^t\ ,$$

$$\sum_{i_m=m}^{n}\ \sum_{i_{m-1}=m-1}^{i_m-1}\cdots\sum_{i_{m-k+1}=m-k+1}^{i_{m-k}-1}\binom{i_{m-k+1}-1}{m-k}^t E(E(\Phi(X_1,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^t \leq EU_n^t \leq$$

$$\leq B(t,m)\binom{n}{m}^{-t}\max_{k=1,m-1}\Bigg(\binom{n}{m}E\Phi^t(X_1,\ldots,X_m)\ ,\ \binom{n}{m}^t(E\Phi(X_1,\ldots,X_m))^t\ ,$$

$$\sum_{i_m=m}^{n}\ \sum_{i_{m-1}=m-1}^{i_m-1}\cdots\sum_{i_{m-k+1}=m-k+1}^{i_{m-k}-1}\binom{i_{m-k+1}-1}{m-k}^t E(E(\Phi(X_1,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^t\ .$$

Пусть $g_c(x_1,\ldots,x_c),\ c=1,\ldots,m$, -канонические функции, соответствующие ядру Φ, r-ранг U-статистики U_n , то есть первое целое число, для которого выполняются соотношения $g_1=\ldots=g_{r-1}=0\ ,\ g_r\neq 0$ (см. [6, стр. 21]).

Теорема 2.14. Для U-статистики U_n ранга r и любого $t \geq 2$ имеет место неравенство

$$E|U_n-\theta|^t \leq (m-r+1)^{t-1} \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c}^t \binom{n}{c}^{-t} B(t,c) \max_{k=1,c-1} \left(\binom{n}{c} E|g_c(X_1,\ldots,X_c)|^t, \right.$$

$$\binom{n}{c}^{t/2} (Eg_c^2(X_1,\ldots,X_c))^{t/2}, \sum_{i_c=c}^{n} \sum_{i_{c-1}=c-1}^{i_c-1} \ldots \sum_{i_{c-k+1}=c-k+1}^{i_{c-k}-1} \binom{i_{c-k+1}-1}{c-k}^{t/2} E(E(g_c^2(X_1,\ldots,X_c)/$$

$$\left. X_1,\ldots,X_k))^{t/2} \right).$$

Из теорем 2.13, 2.14 вытекают следующие оценки моментов U-статистик второго порядка. Пусть $U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i<j \leq n} \Phi(X_i,X_j)$, где $\Phi: \mathscr{X}^2 \to \mathbb{R}$ - симметрическая функция двух переменных. Если $\Phi: \mathscr{X}^2 \to \mathbb{R}$ - неотрицательная функция, для которой $E\Phi^t(X_1,X_2) < \infty$, $t \geq 1$, то

$$\max \left(\binom{n}{2}^{-t+1} E\Phi^t(X_1,X_2), \binom{n}{2}^{-t} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^t \right) E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)^t, E(\Phi(X_1,X_2))^t \right) \leq EU_n^t \leq$$

$$\leq B(t,2) \max \left(\binom{n}{2}^{-t+1} E\Phi^t(X_1,X_2), \binom{n}{2}^{-t} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^t \right) E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)^t, E(\Phi(X_1,X_2))^t \right).$$

Если $t \geq 2$, то для любой U-статистики U_2 с ядром Φ, удовлетворяющим условию $E|\Phi(X_1,X_2)|^t < \infty$, имеет место неравенство

$$E|U_n-\theta|^t \leq 2^{2t-1} B(t,1) \max \left(n^{-t+1} E|g_1(X_1)|^t, n^{-t/2} (Eg_1^2(X_1))^{t/2}\right) +$$

$$+2^{t-1} B(t,2) \max \left(\binom{n}{2}^{-t+1} E|g_2(X_1,X_2)|^t, \binom{n}{2}^{-t} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{t/2} \right) E(E(g_2^2(X_1,X_2)/X_1))^{t/2}, \right.$$

$$\left. \binom{n}{2}^{-t/2} (Eg_2^2(X_1,X_2))^{t/2} \right),$$

то есть

$$E|U_n-\theta|^t \leq 2^{2t-1} B(t,1) \max \left(n^{-t+1} E|E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)-\theta|^t, n^{-t/2} (E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)-\theta)^2)^{t/2}\right)+$$

$$+ 2^{t-1} B(t,2) \max \left(\binom{n}{2}^{-t+1} E|\Phi(X_1,X_2) - E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1) - E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_2) + \theta|^t, \right.$$

$$\binom{n}{2}^{-t} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{t/2} \right) E\left(E(\Phi(X_1,X_2) - E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1) - E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_2) + \theta)^2/X_1) \right)^{t/2},$$

$$\left. \binom{n}{2}^{-t/2} \left(E(\Phi(X_1,X_2) - E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1) - E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_2) + \theta)^2 \right)^{t/2} \right).$$

<u>Пример 2.1.</u> Выборочная дисперсия $\theta(F)=\sigma^2(F)= \int (x-\mu)dF(x)$ ($\mu = \int xdF(x)$),

$$\Phi(x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1-x_2)^2 ,\quad U_n = 1/n \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} \Phi(X_i,X_j) .$$

$$\max \left(\binom{n}{2}^{-t+1} E(X_1-X_2)^{2t} ,\ \binom{n}{2}^{-t} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^t \right) E(X_1-\mu)^{2t} ,\ (E(X_1-X_2)^2)^t \right) \le EU_n^t \le$$

$$\le B(t,2) \max \left(\binom{n}{2}^{-t+1} E(X_1-X_2)^{2t} ,\ \binom{n}{2}^{-t} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^t \right) E(X_1-\mu)^{2t} ,\ (E(X_1-X_2)^2)^t \right) .$$

$$E\,|\,U_n-\theta\,|^t \le 2^{t-1} B(t,1) \max (n^{-t+1} E(X_1-\mu)^{2t} ,\ n^{-t/2} \sigma^t(X_1)) +$$

$$+\ 2^{t-1} B(t,2) \max \left(\binom{n}{2}^{-t+1} E\,|\,X_1X_2 + X_1\mu + X_2\mu - \mu^2\,|^t ,\right.$$

$$\binom{n}{2}^{-t} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{t/2} \right) E(E(X_1X_2 + X_1\mu + X_2\mu - \mu^2)^2/X_1))^{t/2} ,\ \binom{n}{2}^{-t/2} (E(X_1X_2 + X_1\mu +$$

$$\left. +\ X_2\mu - \mu^2)^2)^{t/2} \right).$$

К сожалению, вопрос о точных константах в полученных нами моментных неравенствах для нелинейных симметрических статистик остается открытым. В качестве первого приближения к ответу на него естественно хотя бы найти точный порядок роста констант в аналогах этих неравенств для норм, которые получаются возведением обеих частей неравенств для моментов в степень $1/t$, то есть дать двусторонние оценки одинакового порядка для $(B(t,m))^{1/t}$. Как уже отмечалось выше, в случае линейных статистик точный порядок роста констант $(B(t,1))^{1/t}$ в неравенствах Розенталя для неотрицательных с.в. и с.в. с нулевым средним при $t\to\infty$ есть $t/\ln t$. Для нелинейных статистик правдоподобной представляется гипотеза, что точный порядок роста верхних констант $B_1(t,m)$ и $B_2(t,m)$ в аналогах неравенств (0.38) и (0.39) для норм при $t\to\infty$ есть $(t/\ln t)^m$. В параграфе 2.7 приведены примеры, показывающие, что константы $B_1(t,m)$ и $B_2(t,m)$ в аналогах неравенств (0.38), (0.39) для норм растут не медленнее, чем $(t/\ln t)^m$ при $t\to\infty$, то есть доказывающие эту гипотезу наполовину.

Подчеркнем особо некоторые экономические и биологические приложения результатов глав 1 и 2. Одними из важных задач эконометрики и биометрики являются проблемы измерения неравенства дохода и разнообразия видов. Как характеристики неравенства дохода в экономике (или разнообразия видов в биологии) часто используются меры, которые являются U-статистиками или функциями от них. Например, в ряде работ (см., например, [7, стр.416-421], [24], [28], [47], [49], [51]) в качестве меры неравенства дохода в данной выборке из n индивидуумов использовались статистики (X_i - с.в., обозначающая богатство i -го индивидуума):

$$\varphi_1(X_1,\dots,X_n) = 1/n \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} \Phi_1(X_i,X_j)$$

(дисперсия),

$$\varphi_2(X_1,\dots,X_n) = (1/n \sum_{i=1}^{n}(\log X_i - 1/n \sum_{j=1}^{n}\log X_j)^2)^{1/2} = (\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} \Phi_2(X_i,X_j))^{1/2},$$

$$\varphi_3(X_1,\dots,X_n) = 1/(2n^2) \sum_{1\le i<j\le n} |X_i - X_j| = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} \Phi_3(X_i,X_j)$$

(немасштабированный коэффициент Джини),

$$\varphi_4(X_1,\dots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 ,$$

где $\Phi_1(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$, $\Phi_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(\log x_1 - \log x_2)^2$,
$\Phi_3(x_1,x_2) = \frac{1}{4}(1-1/n)\,|x_1 - x_2|$.

В качестве меры бедности используется статистика

$$\varphi_5(X_1,\dots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} (L_p - X_i)_+ = \sum_{i=1}^{n} \max(L_p - X_i, 0) ,$$

выражающая общий совокупный доход, который должен быть перераспределен из дохода сверх уровня бедности L_p в доход ниже этого уровня, чтобы добиться выравнивания доходов (мера бедности по Фишлоу).

Обычно используемой мерой разнообразия видов является энтропия

$$\varphi_6(X_1,\dots,X_n) = - \sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i .$$

При проверке гипотезы о том, что показатель неравенства дохода в государстве (бедности в государстве, разнообразия видов в биологии) равен некоторому значению a , возникает необходимость в оценках вероятностей критических областей

$$P(\varphi_i(X_1,\dots,X_n) > a + \epsilon).$$

Эти оценки можно получить, применяя результаты глав 1, 2 и неравенство Чебышева.

Обычно оценивание неравенства дохода в государстве осуществляется при предположении, что с.в. X_i имеют одно и то же распределение P . Однако на самом деле это условие является очень жестким и искусственным и дает лишь первое приближение к значению истинного неравенства.

Действительно, условие одинаковой распределенности с.в. X_i означает, по сути, что все граждане государства имеют одинаковые стартовые (или потенциальные) возможности в накоплении богатства. Разумеется, в реальной жизни на стартовые возможности индивидуумов влияет целый ряд факторов (происхождение из богатой или бедной семьи, получение наследства, индивидуальные способности и т.д.). Поэтому при измерении неравенства дохода правильнее предполагать, что с.в. X_i, вообще говоря, различно распределены и что функция распределения каждой из них принадлежит некоторому семейству $\mathcal{F}=\{F_i,\ i=1,\ldots,m\}$. Например, интересным представляется случай, когда $m=2$, с.в. X_i имеет функцию распределения F_1, если i-й индивидуум происходит из богатой семьи и функцию распределения F_2, если из бедной. При решении таких задач возникает необходимость в оценках моментов симметрических статистик от различно распределенных с.в. (параграф 2.4).

Более того, рассмотрим случай государства, которое состоит из m регионов, существенно отличающихся друг от друга по своему экономическому благосостоянию. С учетом различных стартовых возможностей уже целых регионов, при определении неравенства дохода среди граждан такого государства возникает необходимость в рассмотрении статистик от с.в. $X_{i_j j}$, $i_j=1,\ldots,m_j$, $j=1,\ldots,n$, обозначающих богатство i_j-го индивидуума j-го региона. Здесь применимы результаты дипломной работы для многовыборочных статистик (параграф 2.5).

Глава 3 посвящена исследованию функций, не сохраняющих отношение мажорирования. Хотя глава 3 непосредственно не связана с симметрическими статистиками, она включена в дипломную работу, поскольку, на наш взгляд, параграфы 3.1-3.3 хорошо дополняют параграф 1.3, который также связан с теорией мажоризации, и могут быть использованы при обобщении результатов, содержащихся в нем. Кроме того, результаты этой главы применимы при исследовании некоторых так называемых «необоснованных» мер неравенства дохода, то есть мер, не удовлетворяющих обычно предполагаемому условию выпуклости по Шуру (впервые условие выпуклости по Шуру для меры неравенства было сформулировано Х. Дальтоном [24], хотя оно намечается или неявно присутствует в работах М. О. Лоренца [38] и А. С. Пигу [42]; экономисты обычно называют это условие условием Пигу-Дальтона).

Многие математические неравенства можно представить в виде

$$\phi(s/n,s/n,\ldots,s/n) \leq \phi(y_1,y_2,\ldots,y_n) \leq \phi(s,0,\ldots,0), \qquad (0.40)$$

где $s=\sum^n_{i=1}y_i$, $\phi:A\to\mathbb{R}$ -некоторая функция, $A\subseteq\mathbb{R}^n$.

Мощным инструментом для доказательства неравенств подобного типа является теория мажоризации, подробно изложенная в книге А. Маршалла и И. Олкина [7].

Известно, что

$$(s/n,s/n,\ldots,s/n) \prec (y_1,y_2,\ldots,y_n) \prec (s,0,\ldots,0) \qquad (0.41)$$

где $\prec$ - отношение мажорирования, $y_i\geq 0$, $i=1,\ldots,n$, $\sum^n_{i=1}y_i=s$.

В работе А. Маршалла и И. Олкина приведены необходимые и достаточные условия, при которых функция ϕ сохраняет упорядочение мажорирования на A, то есть $(x\prec y)\Rightarrow(\phi(x)\leq\phi(y))$ для всех $x,y\in A$. Из (0.41) следует, что при этих условиях справедливы неравенства (0.40), если только $(s/n,s/n,\ldots,s/n)$, $(s,0,\ldots,0)\in A$.

Существует, однако, ряд функций ϕ, не сохраняющих упорядочение $\prec$, для которых имеют место неравенства (0.40). Такова, например, функция

$$\phi(y_1,y_2,y_3) = 4y_1^3 + 4y_2^3 + 4y_3^3 + 15y_1y_2y_3.$$

Глава 3 содержит некоторые методы доказательства неравенств типа (0.40) для широкого класса функций, не сохраняющих упорядочение $\prec$, и их приложения. Полученные здесь результаты обобщают результаты вышеупомянутой работы А. Маршалла и И. Олкина.

Пусть $s>0$, $n\geq 2$, $A_n=\{x\in\mathbb{R}^n: \sum^n_{i=1}x_i=s,\ x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,n\}$, $L_n=\{(s,0,\ldots,0),(s/2,s/2,0,\ldots,0),\ldots,(s/(n-1),\ldots,s/(n-1),0),(s/n,\ldots,s/n)\}$, $\mathcal{P}_n$ - множество матриц перестановок размера $n\text{x}n$.

Параграф 3.2 содержит достаточные условия того, чтобы экстремальные точки симметрической функции, заданной на симплексе A_n, принадлежали множеству L_n. Результаты этого параграфа позволяют свести задачу нахождения экстремумов широкого класса симметрических функций на A_n, к сравнению значений этих функций в точках множества L_n.

Теорема 3.1. Пусть $\phi:A_n\to\mathbb{R}$ - симметрическая функция, удовлетворяющая условию:

$$\max_{x_1\in[0,t]} \phi(x_1,t-x_1,x_3,\ldots,x_n) = \max\,(\phi(t,0,x_3,\ldots,x_n),\phi(t/2,t/2,x_3,\ldots,x_n)) \qquad (0.42)$$

при всех фиксированных значениях переменных $t,x_3,\ldots,x_n \geq 0$, таких, что $t+\sum^n_{i=3}x_i=s$. Тогда

$$\max_{x\in A_n} \phi(x) = \max_{x\in L_n} \phi(x), \tag{0.43}$$

$$\min_{x\in A_n} \phi(x) = \min_{x\in L_n} \phi(x). \tag{0.44}$$

Нетрудно понять, что условие (0.42) можно переформулировать следующим образом: пусть ℓ - отрезок, лежащий в A_n, с концами на границе A_n, параллельный координатной плоскости Ox_1x_2. Тогда наибольшее значение $\phi(x)$ на ℓ достигается либо в середине ℓ, либо на его конце.

Следствие 3.1. Пусть $\phi:A_n\to\mathbb{R}$ - симметрическая функция, такая, что функция $\psi(x_1)=\phi(x_1,t-x_1,x_3,\dots,x_n)$ монотонна по x_1 на отрезке $t/2\le x_1\le t$ при всех фиксированных значениях переменных $t,x_3,\dots,x_n \ge 0$, удовлетворяющих условию $t+\sum^n_{i=3}x_i=s$. Тогда для ϕ справедливы соотношения (0.43) и (0.44).

Как показано в книге [7], монотонное неубывание функции $\psi(x_1)$ и симметричность ϕ являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы ϕ сохраняла упорядочение $\prec$ на A_n.

Следствие 3.2. Пусть $\phi:A_n\to\mathbb{R}$ - симметрическая функция, непрерывная на A_n и непрерывно дифференцируемая внутри A_n. Положим $\phi_{(k)}(x)=\partial\phi/\partial x_k(x)$. Если функция

$$\phi_{(1)}(x_1,x_2,x^o_3,\dots,x^o_n) - \phi_{(2)}(x_1,x_2,x^o_3,\dots,x^o_n)$$

сохраняет знак в области $x_1\ge x_2$, $x_1+x_2+\sum^n_{i=3}x^o_i=s$ при всех фиксированных значениях $x^o_3,\dots,x^o_n \ge 0$, таких, что $\sum^n_{i=3}x^o_i \le s$, то для функции ϕ справедливы соотношения (0.43) и (0.44).

Следствие 3.2 позволяет получить простые доказательства ряда новых алгебраических неравенств. Имеет место следующее

Следствие 3.3. Пусть $n\ge 2$. Для неотрицательных $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$, таких, что $\sum^n_{i=1}x_i=1$, и $c\in\mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\min(1/(n-1)^2, 1/n^2+c/n^n) \le \sum^n_{i=1}x^3_i+c\prod^n_{i=1}x_i \le \max(1, 1/n^2+c/n^n),$$

$$\min(1/(n-1), 1/n+c/n^n) \le \sum^n_{i=1}x^2_i+c\prod^n_{i=1}x_i \le \max(1, 1/n+c/n^n).$$

Соотношение (0.41) означает, что векторы $(s/n,s/n,\dots,s/n)$ и $(s,0,\dots,0)$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами по упорядочению $\prec$ на симплексе $A_n=\{x\in\mathbb{R}^n: \sum^n_{i=1}x_i=s,\ x_i\ge 0,\ i=1,\dots,n\}$. Однако, на A_n можно задать и другие упорядочения $\preceq$, для которых $(s/n,s/n,\dots,s/n)\preceq(y_1,y_2,\dots,y_n)\preceq(s,0,\dots,0)$ при всех $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in A_n$. Особый интерес представляют упорядочения, обладающие свойством: $(x\preceq y)\Rightarrow(x\prec y)$ для всех $x,y\in A_n$, так как класс функций, их сохраняющих, шире класса функций, сохраняющих упорядочение $\prec$. В параграфе 3.3 приведено одно такое упорядочение и характеризация функций, его сохраняющих.

Определение 3.2. Пусть $x,y\in\mathbb{R}^n$. Будем полагать $x\preceq^1 y$, если разность $y_{[i]}-x_{[i]}$ не возрастает по $i=1,\dots,n$ и $\sum^n_{i=1}x_i=\sum^n_{i=1}y_i$ (здесь $x_{[1]}\ge\dots\ge x_{[n]}$, $x_{[1]}\ge\dots\ge x_{[n]}$ - компоненты векторов x и y, упорядоченные по невозрастанию).

Пусть $A\subseteq\mathbb{R}^n$ - симметричное множество, то есть из отношения $x\in A$ следует, что $xP\in A$ для всех $P\in\mathcal{P}_n$. Упорядочение $\preceq^1$ на A обладает, очевидно, тем свойством, что $x\preceq^1 xP\preceq^1 x$ для всех $x\in A$ и $P\in\mathcal{P}_n$. Поэтому, если функция ϕ сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на симметричном множестве A, то она симметрическая на A. Таким образом, если функция ϕ - симметрическая на симметричном множестве A и сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на множестве $A\cap D$, где $D=\{x_1\ge\dots\ge x_n\}$, то она сохраняет упорядочение $\preceq^1$ и на A. Учитывая это замечание, достаточно ограничится характеризацией функций, сохраняющих отношение $\preceq^1$ на D.

Пусть $\{e_i\}^n_{i=1}$ - система единичных ортов в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2. Пусть $\phi\colon D\to\mathbb{R}$ - непрерывная на границе D функция, удовлетворяющая условиям:

$$\phi\Big(\sum^k_{i=1}(x_i+\lambda(n-k))e_i+\sum^n_{i=k+1}(x_i-\lambda k)e_i\Big)\ge\phi(x),\ k=1,n-1,$$

$$\phi(x_1+\lambda,\dots,x_n+\lambda)\ge\phi(x)$$

для всех $\lambda>0$, $x\in D$ таких, что $\sum^k_{i=1}(x_i+\lambda(n-k))e_i+\sum^n_{i=k+1}(x_i-\lambda k)e_i\in D$. Тогда ϕ сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на D.

Теорема 3.3. Пусть функция ϕ непрерывна на D и непрерывно дифференцируема внутри D, $\phi_{(k)}(x)=\partial\phi/\partial x_k(x)$. Функция ϕ сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на D тогда и только тогда, когда

$$(n-k)\sum^k_{i=1}\phi_{(i)}(x)\ge k\sum^n_{i=k+1}\phi_{(i)}(x),\ k=1,\dots,n-1,$$

$$\sum^n_{i=1}\phi_{(i)}(x)\ge 0$$

для всех $x\in D$.

Результаты, полученные в настоящей диссертации, докладывались на научной конференции молодых математиков и физиков, посвященной 75-летию ТашГУ, IV Ферганском Коллоквиуме по теории вероятностей и математической статистике, научной конференции Института Математики АН Республики Узбекистан, посвященной памяти В. И. Романовского, 2-й научной конференции молодых ученых ТашГУ, посвященной 660-летию Амира Темура, на семинаре по теории вероятностей и математической статистике в ТашГУ, на семинаре по теории вероятностей и математической статистике в Институте Математики АН РУз. Часть этих результатов является содержанием следующих работ:

1. Ибрагимов, Р. Характеризация дважды суперстохастических матриц с помощью слабого супермажорирования. В сб. "*Некоторые вопросы алгебры и анализа*". Ташкент, "Университет", 1994, стр. 32-37.

2. Ибрагимов, Р. Уточнения констант в моментных неравенствах для сумм независимых случайных величин. *Тезисы научной конференции молодых математиков и физиков, посвященной 75-летию ТашГУ*, Ташкент, 1995, стр. 149.

3. Ибрагимов, Р., Шарахметов, Ш. О точной константе в неравенстве Розенталя. *Тезисы IV Ферганского Коллоквиума по теории вероятностей и математической статистике*, Ташкент, 1995, стр. 43-44.

4. Ибрагимов, Р. Об r-независимых стационарных последовательностях. *Тезисы 2-й научной конференции молодых ученых ТашГУ, посвященной 660-летию Амира Темура*, Ташкент, 1996, стр. 72.

5. Ибрагимов, Р., Шарахметов, Ш. О точной константе в неравенстве Розенталя. (принято в печать в журнале «*Теория вероятностей и ее применения*»).

6. Ибрагимов, Р., Шарахметов, Ш. Моментные неравенства для симметрических статистик. (принято в печать в сб. «*Труды IV Ферганского Коллоквиума по теории вероятностей и математической статистике*»).

7. Ибрагимов, Р., Шарахметов, Ш. О функциях, не сохраняющих отношение мажорирования. (представлено в журнал «*Математические заметки*»).

8. Ibragimov, R., Sharahmetov, Sh. Some extremal problems in moment inequalities. (submitted to the journal "*Theory of Probability and its Applications*").

9. Ibragimov, R., Sharahmetov, Sh. Analogues of Khintchine, Marcinkiewicz-Zygmund and Rosenthal inequalities for symmetric statistics. (submitted to the "*Scandinavian journal of statistics*").

10. Ibragimov, R., Sharahmetov, Sh. Bounds on the moments of symmetric statistics.

(submitted to the journal "*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*").

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Шатургуну Шарахметову за постановку задач, обсуждение результатов и постоянное внимание к этой работе.

ГЛАВА 1. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

1.1. Моментные неравенства Розенталя для сумм независимых случайных величин.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Всюду в дальнейшем выражение $\|\xi\|_r$ для с.в ξ, принимающей значения в H и для $0<r<\infty$ будет обозначать $(E\|\xi\|^r)^{1/r}$.

Для с.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $0<s<t<\infty$, положим

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

$$M(s,t,n,\xi)=\max\Big(\big(\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_s^s\big)^{1/s},\ \big(\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_t^t\big)^{1/t}\Big).$$

Как уже упоминалось, Х. П. Розенталем [43] доказаны следующие неравенства:

$$M(1,t,n,\xi)\ \le\ \|S_n\|_t\ \le\ A(t)M(1,t,n,\xi) \tag{1.1}$$

для всех независимых неотрицательных вещественнозначных с.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $1\le t<\infty$;

$$M(2,t,n,\xi)\ \le\ \|S_n\|_t\ \le\ B(t)M(2,t,n,\xi) \tag{1.2}$$

для всех независимых симметрично распределенных с.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $2\le t<\infty$.

В. Б. Джонсон, Г. Шехтман и Дж. Зинн доказали в работе [33], что точные константы $A^*(t)$ и $B^*(t)$ в неравенствах Розенталя (1.1) и (1.2) имеют порядок роста $t/\ln t$ при $t\to\infty$, более того,

$$t/(e\max(1,\ln t))\ \le\ A^*(t)\ \le\ 2t/\max(1,\ln t), \tag{1.3}$$

$$t/(2^{1/2}e\max(1,\ln t))\ \le\ B^*(t)\ \le\ 7.35t/\max(1,\ln t). \tag{1.4}$$

Главная цель настоящей главы - найти явные выражения для констант $A^*(t)$, $B^*(t)$ и доказать новые уточнения этих неравенств (1.1) и (1.2). Формулировку и доказательство основных результатов см. в параграфе 1.5.

1.2. Экстремальные свойства сумм независимых случайных величин с фиксированной суммой «хвостов» распределений.

Всюду в дальнейшем все рассматриваемые с.в. вещественнозначны, если не оговорено противное.

Для $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ будем писать $(a,n)=(a_1,\ldots,a_n)$. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые с.в., $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $\mathcal{F}$ - σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}$, Q - класс конечных положительных σ-аддитивных мер G на $\mathcal{F}$ таких, что $G(\{0\})=0$. Для всякой меры $G\in Q$ через $T(G)$ будем обозначать с.в с характеристической функцией

$$Ee^{iuT(G)} = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux}-1)dG(x)\right).$$

Пусть меры $\lambda,\ \mu,\ \nu \in Q$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d\lambda(x)=0,$$

$$\mu(B)=\mu(-B),\quad B\in\mathcal{F},$$

$$\nu(B)=\nu(B\cap\mathbb{R}_+),\quad B\in\mathcal{F},$$

где $-B=\{-x:\ x\in B\}$. Положим

$$W_1(\lambda)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ E\xi_i=0,\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}P(\xi_i\in B\setminus\{0\})=\lambda(B)\},$$

$$W_1(\mu)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ \xi_i \text{ симметрично распределена},\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}P(\xi_i\in B\setminus\{0\})=\mu(B)\},$$

$$W_1(\nu)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ \xi_i \text{ неотрицательная с.в.},\ i=1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n}P(\xi_i\in B\setminus\{0\})=\nu(B)\}.$$

Через $W_2(\lambda)$, $W_2(\mu)$, $W_2(\nu)$ обозначим подмножества $W_1(\lambda)$, $W_1(\mu)$, $W_1(\nu)$ соответственно, состоящие из одинаково распределенных с.в.

Всюду в дальнейшем ϵ - с.в. с распределением

$$P(\epsilon=1)=P(\epsilon=-1)=\tfrac{1}{2}, \tag{1.5}$$

$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ - последовательность с.в. с распределением (1.5).

С. А. Утевым [15] доказана следующая

Теорема 1.1. Пусть $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(а) существует константа $C(f)$ такая, что

$$|f(a+b)| \leq C(1+|f(a)|)(1+|f(b)|)$$

для всех $a, b \in \mathbb{R}$,

(b) f дважды дифференцируема и f'' выпукла.

Если $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, d\lambda(x) < \infty$, то

$E|f(T(\lambda))| < \infty$,

$$\sup_{(\xi,n)\in W_1(\lambda)} Ef(S_n) \leq Ef(T(\lambda)).$$

Если, кроме того, функция f неотрицательна, то

$$\sup_{(\xi,n)\in W_i(\lambda)} Ef(S_n) = Ef(T(\lambda)), \quad i=1,2.$$

Замечание 1.1. Из рассуждений С. А. Утева следует, что условие (b) теоремы 1.1 можно заменить на условие

(b') f - непрерывная функция такая, что

$f(x)+Ef(a\epsilon_1+b\epsilon_2+x) \geq Ef(a\epsilon_1+x)+Ef(b\epsilon_1+x)$

для всех $a, b, x \in \mathbb{R}$. В [15] ([15, теорема 1]) показано, что для дважды дифференцируемых функций f условия (b) и (b') эквивалентны.

Для случая $W_1(\mu)$ условия теоремы 1.1 можно несколько ослабить. Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 4 в [15], получаем следующую теорему.

Теорема 1.2. Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (a) и

(c) f непрерывна и

$Ef(x\epsilon_1)+Ef(a\epsilon_1+b\epsilon_2+x\epsilon_3) \geq Ef(a\epsilon_1+x\epsilon_2)+Ef(b\epsilon_1+x\epsilon_2)$

для всех $a, b, x \geq 0$.

Если $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, d\mu(x) < \infty$, то

$E|f(T(\mu))| < \infty$,

$$\sup_{(\xi,n)\in W_1(\mu)} Ef(S_n) \leq Ef(T(\mu)).$$

Если, кроме того, функция f неотрицательна, то

$$\sup_{(\xi,n)\in W_i(\mu)} Ef(S_n) = Ef(T(\mu)), \quad i=1,2.$$

Замечание 1.2. Нетрудно показать по аналогии с теоремой 1 работы [15], что для дважды дифференцируемой функции f условие (c) выполняется тогда и только тогда, когда функция $Ef''(\epsilon x)$ выпукла.

Замечание 1.3. Функции e^{ux}, $ch\, ux$, $|x|^t$, $((x-u)_+)^t$, $((x-u)_-)^t$, $t\geq 3$, $u\in\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теорем 1.1 и 1.2 ($w_+=max(0,w)$, $w_-=max(0,-w)$, $w\in\mathbb{R}$).

Обратимся теперь к неотрицательным с.в.

Теорема 1.3. Пусть $f:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (а) и

(d) f непрерывна и выпукла.

Если $\int\limits_0^\infty |f(x)|\,dv(x) < \infty$, то

$$E|f(T(v))| < \infty, \tag{1.6}$$

$$\sup_{(\xi,n)\in W_1(v)} Ef(S_n) \leq Ef(T(v)). \tag{1.7}$$

Если, кроме того, функция f неотрицательна, то

$$\sup_{(\xi,n)\in W_i(v)} Ef(S_n) = Ef(T(v)),\quad i=1,2. \tag{1.8}$$

Замечание 1.4. Функции e^{ux}, $ch\, ux$, x^t, $((x-u)_+)^t$, $((x-u)_-)^t$, $t\geq 1$, $u\in\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3.

Сформулируем две леммы, которые необходимы для доказательства теоремы 1.3.

Для любого вектора $a\in\mathbb{R}^n$ пусть $a_{[1]}\geq\ldots\geq a_{[n]}$ обозначают его компоненты, упорядоченные по невозрастанию.

Определение 1.1 [7]. Пусть $x,\ y\in\mathbb{R}^n$. Говорят, что вектор x мажорируется вектором y ($x\prec y$), если

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]},\quad k=1,\ldots,n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

Определение 1.2 [7]. Пусть $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Функция $f:\ A\to\mathbb{R}$ называется выпуклой (вогнутой) по Шуру на A, если $(x\prec y)\Rightarrow(f(x)\leq f(y))$ (соотв. $(x\prec y)\Rightarrow(f(x)\geq f(y))$) для всех $x,\ y\in A$. Выпуклые (вогнутые) по Шуру функции называются также S-выпуклыми (соотв. S-вогнутыми) функциями.

Лемма 1.1. Непрерывная функция $f:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ выпукла на $\mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда

$$(n-1)f(x)+f(\sum_{i=1}^{n}a_i+x) \geq \sum_{i=1}^{n}f(a_i+x) \tag{1.9}$$

для всех $a_1,\ldots,a_n,\ x \geq 0$.

Доказательство. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ непрерывна и выпукла на $\mathbb{R}_+$. Тогда из Предложения 3.C.1 работы [7] (см. [7, стр.73]) следует, что функция $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ S-выпукла на $\mathbb{R}^n{}_+$. Поскольку

$$(a_1+x,\ldots,a_n+x)\prec(x,\ldots,x,\sum_{i=1}^{n}a_i+x),$$

мы получаем неравенство (1.9). Пусть теперь непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству (1.9), и пусть $0\leq y\leq z$. Полагая $x=y,\ a_1=a_2=(z-y)/2$, получаем, что

$$(f(y)+f(z))/2 \geq f((y+z)/2),$$

то есть f выпукла на $\mathbb{R}_+$.

Лемма 2. Если $\xi,\ \eta$ - неотрицательные с.в., ξ имеет распределение G, с.в. $\xi,\ \eta,\ T(G)$ независимы, $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (a) и (d), $E|f(\xi)| < \infty,\ \ E|f(\eta)| < \infty$, то

$$E|f(T(G)+\eta)| < \infty$$

и

$$Ef(\xi+\eta) \leq Ef(T(G)+\eta).$$

Доказательство. Распределение с.в. $T(G)$ совпадает с распределением с.в. $\sum_{i=1}^{\theta}\xi_i$, где θ - пуассоновская с.в. с параметром 1, $\xi_1,\ \xi_2,\ldots$ - последовательность независимых неотрицательных с.в. с распределением G таких, что η не зависит от $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Легко видеть [15, лемма 3.4], что если функция f удовлетворяет условию (a), то для всех $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ справедливо следующее неравенство:

$$|f(\sum_{i=1}^{n}a_i)| \leq q^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1+|f(a_i)|),$$

где $q=\max(1,2C(f))$. Следовательно,

$$E|f(T(G)+\eta)| = (1/e)\sum_{k=0}^{\infty}E|f(\sum_{i=1}^{k}\xi_i+\eta))|/k! \leq$$

$$\leq (1+E|f(\eta)|)\sum_{k=0}^{\infty}(q(1+E|f(\xi)|))^k/k! = (1+E|f(\eta)|)\exp(q(1+E|f(\xi)|)-1) < \infty.$$

Из леммы 1 следует, что

$$(1/e)\sum_{k=1}^{\infty} Ef(\sum_{i=1}^{k}\xi_i+\eta)/k! \ge (1/e)\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{k} Ef(\xi_i+\eta)-(k-1)Ef(\eta))/k! = Ef(\xi+\eta)-e^{-1}Ef(\eta) .$$

Значит,

$$Ef(T(G)+\eta) = (1/e)\sum_{k=0}^{\infty} Ef(\sum_{i=1}^{k}\xi_i+\eta)/k! \ge Ef(\xi+\eta) .$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Неравенства (1.6), (1.7) являются очевидными следствиями леммы 1.2.

Докажем соотношение (1.8). Пусть $f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям (a) и (d). Достаточно доказать точность верхней границы в (1.7). Возьмем $n\ge v(R_+)$. Пусть $\xi_{1n},\dots,\xi_{nn}$ - независимые неотрицательные одинаково распределенные с.в., такие, что $P(\xi_{in}\in B)=n^{-1}v(B)$ для $B\subseteq\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, $i=1,\dots,n$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} P(\xi_{in}\in B\setminus\{0\})=v(B)$, то есть $(\xi_{1n},\dots,\xi_{nn})\in W_2(v)$.

Характеристическая функция с.в.

$$S_n^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}\xi_{in}$$

равна

$$(1+n^{-1}\int_0^{\infty}(e^{iux}-1)dv(x))^n \underset{n\to\infty}{\to} exp(\int_0^{\infty}(e^{iux}-1)dv(x)) .$$

Так как функция f непрерывна, заключаем, что

$$f(S_n^{(n)}) \to f(T(v)) \quad \text{(по распределению)}$$

при $n\to\infty$. Применяя лемму Фату, получаем, что

$$\liminf_{n\to\infty} Ef(S_n^{(n)}) \ge Ef(T(v)) .$$

Теорема доказана.

Пусть s - произвольное положительное число, $n\ge s$. Положим

$$H(s) = \{(p,n) :\ 0\le p_i\le 1\ ,\ i=1,\dots,n\ ,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=s\} .$$

Пусть $\theta(s)$ - пуассоновская с.в. с параметром s , $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$ - независимые пуассоновские с.в. с параметром $s/2$, $X_1(p_1),\dots,X_n(p_n)$ - независимые с.в с распределениями Бернулли:

$$P(X_i(p_i)=1)=p_i\,,\quad P(X_i(p_i)=0)=1-p_i\,,\quad i=1,\dots,n\,,$$

$Y_1(p_1),\dots,Y_n(p_n)$ - независимые с.в. с распределениями:

$$P(Y_i(p_i)=1)=P(Y_i(p_i)=-1)=p_i/2,\quad P(Y_i(p_i)=0)=1-p_i,\quad i=1,\dots,n\,.$$

Очевидно, что для любого $(p,n)\in H(s)$

$$\sum_{i=1}^{n} P(X_i(p_i)\in B\setminus\{0\}) \;=\; G_1(B),$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(Y_i(p_i)\in B\setminus\{0\}) \;=\; G_2(B),$$

где $G_1(\{1\})=s$, $G_2(\{1\})=G_2(\{-1\})=s/2$, $G_1(\mathbb{R})=G_2(\mathbb{R})=s$. Распределения с.в. $T(G_1)$ и $T(G_2)$ совпадают с распределениями с.в. $\theta(s)$ и $\theta_1(s)\text{-}\theta_2(s)$ соответственно.

Применяя теоремы 1.2, 1.3, получаем, что если $f_1\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ - функция удовлетворяющая условиям (a) и (d), $f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям (a) и (c), то $E\,|\,f_1(\theta(s))\,| \;<\; \infty$, $E\,|\,f_2(\theta_1(s)\text{-}\theta_2(s))\,| \;<\; \infty$,

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)) \;\le\; Ef_1(\theta(s))\,,$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)) \;\le\; Ef_2(\theta_1(s)\text{-}\theta_2(s))\,.$$

Если, кроме того, функции f_1 и f_2 неотрицательны, то

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)) \;=\; \sup_{n} Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)) \;=\; Ef_1(\theta(s))\,, \tag{1.10}$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)) \;=\; \sup_{n} Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)) \;=\; Ef_2(\theta_1(s)\text{-}\theta_2(s))\,. \tag{1.11}$$

В частности, в силу замечаний 1.3, 1.4 имеем, что

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i))^t \;=\; \sup_{n} E(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n))^t \;=\; E\theta^t(s)\,, \tag{1.12}$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E((\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)\text{-}u)_+)^t \;=\; \sup_{n} E((\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)\text{-}u)_+)^t \;=\; E((\theta(s)\text{-}u)_+)^t \tag{1.13}$$

для $t\ge 1$, $u\in\mathbb{R}$,

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E\,|\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i))\,|^t \;=\; \sup_{n} E\,|\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n))\,|^t \;=\; E\,|\,\theta_1(s)\text{-}\theta_2(s)\,|^t\,, \tag{1.14}$$

$$\sup_{(p,n)\in H(s)} E((\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)\text{-}u)_+)^t \;=\; \sup_{n} E((\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)\text{-}u)_+)^t \;=\; E((\theta_1(s)\text{-}\theta_2(s)\text{-}u)_+)^t \tag{1.15}$$

для $t \geq 3$, $u \in \mathbb{R}$. Применяя соотношения (1.13), (1.15) и неравенство Чебышева, получаем верхние оценки для хвостовых вероятностей с.в. $\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)$ и $\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)$, которые напоминают теорему 1 работы [25].

Следствие 1.1. Для всех $a>0$, $(p,n)\in H(s)$ справедливы следующие неравенства:

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)\geq a\Big) \leq \inf_{0\leq u<a} \int_u^\infty ((x-u)/(a-u))d\pi_1(x), \qquad (1.16)$$

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)\geq a\Big) \leq \inf_{0\leq u<a} \int_u^\infty ((x-u)^3/(a-u)^3)d\pi_2(x), \qquad (1.17)$$

где $\pi_1(x)$ и $\pi_2(x)$ - функции распределения с.в. $\theta(s)$ и $\theta_1(s)-\theta_2(s)$ соответственно.

Зафиксируем $a>0$ и рассмотрим класс $\mathcal{F}_a^{(1)}$ функций f_1, удовлетворяющих условиям

$$f_1(x) = \int_0^x (x-u)dF_1(u), \quad x\geq 0,$$

$$f_1(x)=0, \quad x<0,$$

$$f_1(a) = \int_0^a (x-u)dF_1(u) = 1,$$

и класс $\mathcal{F}_a^{(2)}$ функций f_2, удовлетворяющих условиям

$$f_2(x) = (1/3!) \int_0^x (x-u)^3dF_2(u), \quad x\geq 0,$$

$$f_2(x)=0, \quad x<0,$$

$$f_2(a) = (1/3!) \int_0^a (x-u)^3dF_2(u) = 1,$$

где $F_1(x)$, $F_2(x)$ - неотрицательные ограниченные неубывающие функции на $[0,+\infty)$ с $F_1(0)=F_2(0)=0$. Из соотношений (1.10), (1.11) и неравенства Чебышева следует, что

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)\geq a\Big) \leq Ef_1(\theta(s)), \qquad (1.18)$$

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)\geq a\Big) \leq Ef_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)) \qquad (1.19)$$

для всех $a>0$, $(p,n)\in H(s)$, $f_1\in\mathcal{F}_a^{(1)}$, $f_2\in\mathcal{F}_a^{(2)}$. По аналогии с Предложением 4 работы [25] нетрудно показать, что оценки, даваемые соотношениями (1.16) и (1.17), являются наилучшими среди всех оценок (1.18) и (1.19) соответственно, то есть

$$\inf_{f_1\in\mathcal{F}_a^{(1)}} Ef_1(\theta(s)) = \inf_{0\le u<a} \int_u^\infty ((x-u)/(a-u))d\pi_1(x),$$

$$\inf_{f_2\in\mathcal{F}_a^{(2)}} Ef_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)) = \inf_{0\le u<a} \int_u^\infty ((x-u)^3/(a-u)^3)d\pi_2(x).$$

1.3. Вогнутость по Шуру некоторых функционалов, заданных на суммах независимых дискретных случайных величин.

Настоящий параграф посвящен обобщениям соотношений (1.10) и (1.11). На наш взгляд, результаты, полученные здесь, проливают больше света на природу этих соотношений, чем их доказательства, приведенные в предыдущем параграфе.

Определение 1.3 [7]. Пусть $I=(a,b)$, $-\infty\le a<b\le\infty$, $Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$, и f - функция, определенная на множестве $I\cap Z$. Функция f называется выпуклой, если

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

для всех $x, y\in I\cap Z$ и $\alpha\in[0,1]$ таких, что $\alpha x+(1-\alpha)y\in I\cap Z$.

Замечание 1.5. Нетрудно видеть (см. [7, 16.B.10.a, стр.457] , что функция f выпукла на множестве $I\cap Z$ тогда и только тогда, когда

$$f(2+z)-2f(1+z)+f(z) \ge 0$$

для всех $z\in Z\cap(a,b-2)$.

В. Геффдингом [32] доказано, что

$$Ef(\sum_{i=1}^n X_i(p_i)) \le Ef(\sum_{i=1}^n X_i(s/n)), \tag{1.20}$$

где $f:\{0,1,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$ - выпуклая функция, $s=\sum_{i=1}^n p_i$. Так как

$$(s/n,s/n,\ldots,s/n) \prec (p_1,p_2,\ldots,p_n), \tag{1.21}$$

то неравенство (1.20) является специальным случаем следующей теоремы, полученной С. Карлином и А. Новиковым [34] (см. также [7, стр. 366]).

Теорема 1.4. Если $f: \{0,1,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$ - выпуклая функция, то

$$g(p)=Ef(\sum_{i=1}^n X_i(p_i))$$

является S-вогнутой функцией от $p=(p_1,\ldots,p_n)$.

Следующий результат доказан А. Маршаллом и И. Олкиным [7, стр. 366].

Теорема 1.5. Пусть $R_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$. Если $f\colon \{0,1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$ - функция, удовлетворяющая условиям $f(0) \leq \ldots \leq f(n-1)$, то

$$g(R)=Ef(\sum_{i=1}^{n} X_i(exp(-R_i)))$$

является S-выпуклой функцией от $R=(R_1,\ldots,R_n)$.

Докажем аналогичные результаты для с.в. $Y_i(p_i)$.

Теорема 1.6. Если функция $f\colon \{0,\pm 1,\ldots,\pm n\} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$E(f(2+\epsilon x)-4f(1+\epsilon x)+6f(\epsilon x)-4f(-1+\epsilon x)+f(-2+\epsilon x)) \geq 0$$

для всех $x \in \{0,1,\ldots,(n-2)\}$, то

$$g(p)=Ef(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i))$$

является S-вогнутой функцией от $p=(p_1,\ldots,p_n)$.

Замечание 1.6. Легко проверить, что любая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (c) (см. предыдущий параграф), удовлетворяет также условиям теоремы 1.6.

Доказательство. Пусть ϵ не зависит от $Y_1(p_1)$, $Y_2(p_2)$. Так как распределение с.в. $Y_i(p_i)$ симметрично, функция

$$g(p) = E\{E[f(Y_1(p_1)+Y_2(p_2)+\sum_{i=3}^{n} Y_i(p_i)) \mid \sum_{i=3}^{n} Y_i(p_i)]\}$$

S-вогнута по $p \in \mathbb{R}^n$, если функция $Ef(Y_1(p_1)+Y_2(p_2)+\epsilon x)$ S-вогнута по p_1 и p_2 для всех $x \in \{0,1,\ldots,(n-2)\}$. Имеем, что

$$Ef(Y_1(p_1)+Y_2(p_2)+\epsilon x) = E(f(2+\epsilon x)-4f(1+\epsilon x)+6f(\epsilon x)-4f(-1+\epsilon x)+$$
$$+f(-2+\epsilon x))p_1p_2/4 + E(f(1+\epsilon x)-2f(\epsilon x)+f(-1+\epsilon x))(p_1+p_2)/2 + Ef(\epsilon x).$$

Поскольку произведение p_1p_2 является S-вогнутым по p_1 и p_2, и так как при условиях теоремы коэффициент при p_1p_2 неотрицателен, получаем требуемый результат (для сравниваемых мажоризаций сумма p_1+p_2 фиксирована). Теорема доказана.

Теорема 1.7. Пусть $R_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$. Если $f\colon \{0,\pm 1,\ldots,\pm n\} \to \mathbb{R}$ - выпуклая функция, то

$$g(R)=Ef(\sum_{i=1}^{n} Y_i(exp(-R_i)))$$

является S-выпуклой функцией от $R=(R_1,\ldots,R_n)$.

Доказательство. Точно также, как и при доказательстве теоремы 1.6, достаточно показать, что функция $Ef(Y_1(exp(-R_1)) + Y_2(exp(-R_2)) + \epsilon x)$ S-выпукла по R_1 и R_2 для всех $x \in \{0,1,\dots,(n-2)\}$. Имеем, что

$$Ef(Y_1(exp(-R_1)) + Y_2(exp(-R_2)) + \epsilon x) = E(f(2+\epsilon x) - 4f(1+\epsilon x) + 6f(\epsilon x) -$$
$$-4f(-1+\epsilon x) + f(-2+\epsilon x))exp(-(R_1+R_2))/4 + E(f(1+\epsilon x) - 2f(\epsilon x) +$$
$$+ f(-1+\epsilon x))(exp(-R_1) + exp(-R_2))/2 + Ef(\epsilon x) .$$

Поскольку функция $exp(-x)$ выпукла, получаем [19, Предложение 3.C.1], что $exp(-R_1) + exp(-R_2)$ - S-выпуклая функция. Так как функция f выпукла, то

$$E(f(1+\epsilon x) - 2f(\epsilon x) + f(-1+\epsilon x)) \geq 0$$

для всех $x \in \{0,1,\dots,(n-2)\}$. Теорема доказана.

Пусть M_1 - класс неотрицательных непрерывных выпуклых функций f_1: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (a) из параграфа 1.2, M_2 - класс неотрицательных дважды дифференцируемых функций f_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (a), для которых $Ef''(\epsilon x)$ - выпуклая функция. Нетрудно видеть, что если $f_1 \in M_1$, $f_2 \in M_2$, то $f_1^2 \in M_1$, $f_2^2 \in M_2$. Применяя соотношения (1.10) и (1.11), получаем, что

$$\sup_n Ef_1^2(\sum_{i=1}^n X_i(s/n)) = Ef_1^2(\theta(s)) < \infty ,$$

$$\sup_n Ef_2^2(\sum_{i=1}^n Y_i(s/n)) = Ef_2^2(\theta_1(s) - \theta_2(s)) < \infty ,$$

то есть последовательности

$$\{f_1(\sum_{i=1}^n X_i(s/n))\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.22}$$

и

$$\{f_2(\sum_{i=1}^n Y_i(s/n))\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.23}$$

равномерно интегрируемы. Следующая теорема 1.8 показывает, что соотношения (1.10) и (1.11) остаются справедливыми, если условие (a) заменено на более слабые условия равномерной интегрируемости последовательностей (1.22) и (1.23).

Теорема 1.8. Если f_1: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - непрерывная на $\mathbb{R}_+$ и выпуклая на $Z_+ = \{0,1,2,..\}$ функция, для которой последовательность

$$\{\,|f_1(\sum_{i=1}^n X_i(s/n)|\,\}_{n=1}^{\infty}$$

равномерно интегрируема и $E|f_1(\theta(s))| < \infty$, то справедливо соотношение (1.10). Если f_2: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция, для которой последовательность

$$\{|f_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n))|\}_{n=1}^{\infty}$$

равномерно интегрируема, и

$$E(f(2+\epsilon x)-4f(1+\epsilon x)+6f(\epsilon x)-4f(-1+\epsilon x)+f(-2+\epsilon x)) \geq 0$$

для всех $x\in\{0,1,2,...\}$, $E|f_2(\theta_1(s)-\theta_2(s))| < \infty$, то справедливо соотношение (1.11).

Доказательство. Из соотношения (1.21) и теорем 1.4,1.6 следует, что для любого $(p,n)\in H(s)$ справедливы следующие неравенства:

$$Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)) \leq Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)), \tag{1.24}$$

$$Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)) \leq Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)). \tag{1.25}$$

Кроме того, поскольку $(s/(n+1),...,s/(n+1), s/(n+1))\prec(s/n,...,s/n,0)$, имеем, что

$$Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n))\leq Ef_1(\sum_{i=1}^{n+1} X_i(s/(n+1))), \tag{1.26}$$

$$Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n))\leq Ef_2(\sum_{i=1}^{n+1} Y_i(s/(n+1))),\quad n\geq 1. \tag{1.27}$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)\to\theta(s)$, $\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)\to\theta_1(s)-\theta_2(s)$ (по распределению) при $n\to\infty$ и f_1, f_2 - непрерывные функции, мы получаем, что

$$f_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n))\to f_1(\theta(s)) \text{ (по распределению)}, \tag{1.28}$$

$$f_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n))\to f_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)) \text{ (по распределению)} \tag{1.29}$$

при $n\to\infty$. Поскольку последовательности

$$\{|f_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)|\}_{n=1}^{\infty}$$

и

$$\{|f_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)|\}_{n=1}^{\infty}$$

равномерно интегрируемы, из соотношений (1.28) и (1.29) следует, что

$$Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)) \to Ef_1(\theta(s)) \ , \tag{1.30}$$

$$Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)) \to Ef_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)) \tag{1.31}$$

при $n \to \infty$. Соотношения (1.24)-(1.27), (1.30), (1.31) влекут, что

$$Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(p_i)) \le \lim_{n\to\infty} Ef_1(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)) = Ef_1(\theta(s)) \ ,$$

$$Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(p_i)) \le \lim_{n\to\infty} Ef_2(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)) = Ef_2(\theta_1(s)-\theta_2(s)) \ .$$

Теорема доказана.

Замечание 1.7. Отметим, что равномерная интегрируемость последовательностей (1.22) и (1.23) с $f_1(x)=x^t$, $x\ge 0$, $t\ge 1$, $f_2(x)=|x|^t$, $x\in\mathbb{R}$, $t\ge 3$, является следствием неравенств (1.1), (1.2) и оценок (1.3), (1.4). Действительно,

$$\sup_n Ef_1^{\,2}(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n)) = \sup_n E(\sum_{i=1}^{n} X_i(s/n))^{2t} \le A_1(t)\max(s \ , s^{2t}) \ ,$$

$$\sup_n Ef_2^{\,2}(\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)) = \sup_n E|\sum_{i=1}^{n} Y_i(s/n)|^{2t} \le B_1(t)\max(s \ , s^{t})$$

где $A_1(t)=(4t/\max(1,\ln 2t))^{2t}$, $B_1(t)=(14{,}7t/\ln 2t)^{2t}$.

1.4. Экстремумы некоторых функционалов, заданных на суммах независимых симметрично распределенных и неотрицательных случайных величин, принимающих значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые с.в. с конечным t-м моментом, принимающие значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$, $0<s<t<\infty$. Зафиксируем величины $a_i\ge 0$, $b_i\ge 0$, $a_i^t\le b_i$, $i=1,\ldots n$, A , D_s , $M\ge 0$. Положим

$$M_1(n,s,t,a,b,H)=\{(\xi,n): E\|\xi_i\|^s=a_i^s,\ E\|\xi_i\|^t=b_i,\ i=1,\ldots,n\} \ ,$$

$$M_2(n,s,t,a,b,H)=\{(\xi,n): E\|\xi_i\|^s\le a_i^s,\ E\|\xi_i\|^t\le b_i,\ i=1,\ldots,n\} \ ,$$

$$U_1(s,t,A,D_s,H)=\{(\xi,n): n\ge 1,\ (\sum_{i=1}^{n} E\|\xi_i\|^s)^{1/s}=D_s,\ \sum_{i=1}^{n} E\|\xi_i\|^t=A\} \ ,$$

$$U_2(s,t,A,D_s,H)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ (\sum_{i=1}^{n} E\|\xi_i\|^s)^{1/s}\leq D_s,\ \sum_{i=1}^{n} E\|\xi_i\|^t\leq A\}\ ,$$

$$U(s,t,M,H)=\{(\xi,n):\ n\geq 1,\ \max((\sum_{i=1}^{n} E\|\xi_i\|^s)^{t/s},\ \sum_{i=1}^{n} E\|\xi_i\|^t)=M\}.$$

Через $U_3(s,t,A,D_s,H)$ и $U_4(s,t,A,D_s,H)$ обозначим подмножества $U_1(s,t,A,D_s,H)$ и $U_2(s,t,A,D_s)$ соответственно, состоящие из одинаково распределенных с.в. Пусть $M_{1i}(n,s,t,a,b,H)$, $i=1,2$, $U_{1j}(s,t,A,D_s,H)$, $j=1,2,3,4$, $U_1(s,t,M,H)$ - подмножества $M_i(n,s,t,a,b,H)$, $i=1,2$, $U_j(s,t,A,D_s,H)$, $j=1,2,3,4$, $U(s,t,M,H)$ соответственно, состоящие из неотрицательных с.в., $M_{2i}(n,s,t,a,b,H)$, $i=1,2$, $U_{2j}(s,t,A,D_s,H)$, $j=1,2,3,4$, $U_2(s,t,M,H)$ - их подмножества, состоящие из симметрично распределенных с.в. Пусть $\theta(A,D_s)$ - пуассоновская с.в. с параметром $(D_s^t/A)^{s/(t-s)}$, $\theta_1(A,D_s)$, $\theta_2(A,D_s)$ - независимые пуассоновские с.в. с параметром $\frac{1}{2}(D_s^t/A)^{s/(t-s)}$, $U_1(a_1,b_1,s,t),\ldots,U_n(a_n,b_n,s,t)$ - независимые с.в. с распределением

$$P(U(a,b,s,t)=0)\ =\ 1-(a^t/b)^{s/(t-s)}\ ,\quad P(U(a,b,s,t)=(b/a^s)^{1/(t-s)})\ =\ (a^t/b)^{s/(t-s)}\ ,$$

$V_1(a_1,b_1,s,t),\ldots,V_n(a_n,b_n,s,t)$ - независимые с.в. с распределением

$$P(V(a,b,s,t)=0)\ =\ 1-(a^t/b)^{s/(t-s)}\ ,$$

$$P(V(a,b,s,t)=(b/a^s)^{1/(t-s)})\ =\ P(V(a,b,s,t)=-(b/a^s)^{1/(t-s)})\ =\ \tfrac{1}{2}(a^t/b)^{s/(t-s)}\ .$$

Обозначим

$$F_1(a,b,n,s,t)=E(\sum_{i=1}^{n} U_i(a_i,b_i,s,t))^t,$$

$$G_1(a,b,n,t)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i^t)+(\sum_{i=1}^{n} a_i)^t\ ,$$

$$F_2(a,b,n,s,t)=E\,|\sum_{i=1}^{n} V_i(a_i,b_i,s,t)\,|^t,$$

$$G_2(a,b,n,t)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i^t)+E\,|\sum_{i=1}^{n} a_i\epsilon_i\,|^t\ .$$

Положим $n_0\ =\ n_0(A,D_s)\ =\ \min\ \{\ n\in\mathbb{N}\colon An^{t/s-1}\geq D_s^t\ \}$.

Теорема 1.9. Если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{1k}(n,s,t,a,b,\mathbb{R})} ES_n^t\ =\ F_1(a,b,n,s,t)\ ,\quad k=1,2\ , \tag{1.32}$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{1k}(s,t,A,D_s,\mathbb{R})} ES_n^t\ =\ (A/D_s^s)^{t/(t-s)}E\theta^t(A,D_s)\ ,\quad k=1,2,3,4\ , \tag{1.33}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{11}(n,s,t,a,b,\mathbb{R})} ES_n^t\ =\ G_1(a,b,n,t)\ . \tag{1.34}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{13}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = A+D_s^t(n_0^{t-t/s}-n_0^{1-t/s}) . \qquad (1.35)$$

Если $1<t<2$, $1\le s<t$ или $t\ge 2$, $t\text{-}1\le s<t$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{1k}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} ES_n^t = G_1(a,b,n,t) , \quad k=1,2 , \qquad (1.36)$$

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{11}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} ES_n^t = F_1(a,b,n,s,t) , \qquad (1.37)$$

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{13}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = E\,(\sum_{i=1}^{n_0} U_i(D_s n_0^{-1/s}, An_0^{-1}, s,t)\,)^t . \qquad (1.38)$$

Если $1<t<2$, $s=1$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{1k}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = A+D_1^t , \quad k=1,2,3,4 . \qquad (1.39)$$

Если $t>1$, $s=1$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{11}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = \max\,(A,\ D_1^t) . \qquad (1.40)$$

Замечание 1.8. Соотношения (1.34), (1.35), (1.40) для $t\ge 2$, $s=1$ являются следствиями леммы 9.3 в [15] и ее доказательства.

Следующая теорема обобщает теорему 5 работы [15].

Теорема 1.10. Если $2<t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{2k}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} E|S_n|^t = F_2(a,b,n,s,t) , \quad k=1,2 , \qquad (1.41)$$

Если $3\le t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2k}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t = (A/D_s^s)^{t/(t-s)} E|\theta_1(A,D_s)\text{-}\theta_2(A,D_s)|^t , \quad k=1,2,3,4 , \qquad (1.42)$$

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{21}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} E|S_n|^t = G_2(a,b,n,t) . \qquad (1.43)$$

Если $2<t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in M_{2k}(n,s,t,a,b,\mathbf{R})} E|S_n|^t = G_2(a,b,n,t) , \quad k=1,2 , \qquad (1.44)$$

Если $3 \le t < 4$, $2 \le s < t$ или $t \ge 4$, $t-2 \le s < t$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{21}(n,s,t,a,b,\mathbb{R})} E|S_n|^t = F_2(a,b,n,s,t). \tag{1.45}$$

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A,D_s,\mathbb{R})} E|S_n|^t = E\,\Big|\sum_{i=1}^{n_0} V_i(D_s n_0^{-1/s}, A n_0^{-1}, s, t)\Big|^t. \tag{1.46}$$

Если $2 < t < 4$, $s=2$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2k}(2,t,A,D_2,\mathbb{R})} ES_n^t = A + (2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2}))D_2^t, \quad k=1,2,3,4. \tag{1.47}$$

Если $t \ge 4$, $s=2$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(2,t,A,D_2,\mathbb{R})} E|S_n|^t = A + (n_0^{-t/2}E\Big|\sum_{i=1}^{n_0}\epsilon_i\Big|^t - n_0^{1-t/2})D_2^t. \tag{1.48}$$

Замечание 1.9. Полагая $k=1$, $n=2$, $t=3$, $s=1$ в (1.43) и $k=1$, $n=2$, $t=3$, $s=2$ в (1.44), получаем, что для всех независимых с.в. X и Y с одинаковым симметричным распределением и конечным третьим моментом справедливы следующие неравенства, константы в которых оптимальны:

$$2E|X|^3 + 2(E|X|)^3 \le E|X+Y|^3 \le 2E|X|^3 + \sqrt{2}(EX^2)^{3/2}, \tag{1.49}$$

$$2E|X|^3 + 2(E|X|)^3 \le E|X-Y|^3 \le 2E|X|^3 + 2(EX^2)^{3/2}. \tag{1.50}$$

Неравенства (1.50) и правое неравенство (1.49) доказаны С.-Г. Эссееном в работе [27] при более слабом условии $EX=0$. Интересно отметить, что в отличие от левого неравенства (1.49) точная нижняя граница для $E|X+Y|^3$ при условии $EX=0$ имеет вид $2E|X|^3 + 1.5(E|X|)^3$. Теорема 1.10 дополняет также результаты Д. Дж. Дейли [23].

Замечание 1.10. Очевидно, что

$$E\Big\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big\|^t \le E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|\Big)^t$$

для всех независимых H-значных с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $1 \le t < \infty$. Кроме того, известно, что (см. [15, Следствие 4])

$$E\Big\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big\|^t \le E\Big|\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|\epsilon_i\Big|^t$$

для всех независимых симметрично распределенных H-значных с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $3 \le t < \infty$, которые не зависят от $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$. Используя эти неравенства, легко получить по аналогии со следствием 5 работы [15], что в случае произвольного гильбертового пространства H справедливы следующие соотношения:

$$\sup_{(\xi,\eta)\in M_k(n,s,t,a,b,H)} ES_n^t = F_1(a,b,n,s,t)\ ,\quad k=1,2\ ,$$

$$\sup_{(\xi,\eta)\in U_k(s,t,A,D_s,H)} ES_n^t = (A/D_s^s)^{t/(t-s)}E\theta^t(A,D_s)\ ,\quad k=1,2,3,4\ ,$$

если $1<t<2$, $0<s\le t\text{-}1$ или $t\ge 2$, $0<s\le 1$;

$$\sup_{(\xi,\eta)\in M_k(n,s,t,a,b,H)} ES_n^t = G_1(a,b,n,t)\ ,\quad k=1,2\ ,$$

если $1<t<2$, $1\le s<t$ или $t\ge 2$, $t\text{-}1\le s<t$;

$$\sup_{(\xi,\eta)\in U_k(1,t,A,D_1,H)} ES_n^t = A+D_1^t\ ,\quad k=1,2,3,4\ .$$

если $1<t<2$, $s=1$;

$$\sup_{(\xi,\eta)\in M_{2k}(n,s,t,a,b,H)} E|S_n|^t = F_2(a,b,n,s,t)\ ,\quad k=1,2\ ,$$

$$\sup_{(\xi,\eta)\in U_{2k}(s,t,A,D_s,H)} E|S_n|^t = (A/D_s^s)^{t/(t-s)}E|\theta_1(A,D_s)\text{-}\theta_2(A,D_s)|^t\ ,\quad k=1,2,3,4\ ,$$

если $3\le t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$;

$$\sup_{(\xi,\eta)\in M_{2k}(n,s,t,a,b,H)} E|S_n|^t = G_2(a,b,n,t)\ ,\quad k=1,2\ ,$$

если $3\le t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$;

$$\sup_{(\xi,\eta)\in U_{2k}(2,t,A,D_2,H)} ES_n^t = A+(2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2}))D_2^t\ ,\quad k=1,2,3,4\ ,$$

если $3\le t<4$, $s=2$.

Следующая теорема обобщает теорему 7 работы [15].

Теорема 1.11. 1) Пусть $\dim H=n$. Если $2<t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$\inf_{(\xi,\eta)\in M_{21}(n,s,t,a,b,H)} E|S_n|^t = \sum_{i=1}^{n}(b_i\text{-}a_i^t)+(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)^{t/2}\ . \tag{1.51}$$

Если $2<t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in M_{21}(n,s,t,a,b,H)} E|S_n|^t = E(\sum_{i=1}^{n} U_i(a_i^2,b_i,s/2,t/2)\,. \tag{1.52}$$

2) Пусть $dim\, H=\infty$. Если $2<t<4$, $0<s\leq t\text{-}2$ или $t\geq 4$, $0<s\leq 2$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A,D_s,H)} E|S_n|^t = A+D_s^t(n_0^{t/2-t/s}-n_0^{1-t/s})\,. \tag{1.53}$$

Если $2<t<4$, $2\leq s<t$ или $t\geq 4$, $t\text{-}2\leq s<t$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A,D_s,H)} E|S_n|^t = E\,(\sum_{i=1}^{n_0} U_i(D_s^2 n_0^{-2/s},An_0^{-1},s/2,t/2)\,)^{t/2}\,. \tag{1.54}$$

Если $t>2$, $s=2$, то

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{21}(2,t,A,D_2,H)} E|S_n|^t = \max\,(A,\, D_2^t)\,. \tag{1.55}$$

Замечание 1.11. Правая часть соотношений (1.51) для $2<t<4$, $0<s\leq t\text{-}2$ и $t\geq 4$, $0<s\leq 2$, (1.52) для $3\leq t<4$, $0<s\leq t\text{-}2$ и $t\geq 4$, $0<s\leq 2$, (1.53) для $t\geq 4$, $s=2$, (1.54) для $3\leq t<4$, $2\leq s<t$ и $t\geq 4$, $t\text{-}2\leq s<t$ заведомо меньше, чем правые части (1.43), (1.45), (1.48), (1.46) соответственно. Интересно отметить, что в отличие от отыскания супремумов (соотношения (1.32), (1.33), (1.36), (1.39), (1.41), (1.42), (1.44), (1.47)) инфимумы по классам $U_{13}(s,t,A,D_1,\mathbb{R})$, $U_{23}(2,t,A,D_2,H)$, где рассматриваются только одинаково распределенные с.в. (соотношения (1.35), (1.38), (1.53), (1.54)), меньше, чем инфимумы по всем классам $U_{11}(s,t,A,D_1,\mathbb{R})$, $U_{21}(2,t,A,D_2,H)$ (соотношения (1.40), (1.55)).

Сформулируем ряд предварительных результатов, необходимых для доказательства теорем 1.9-1.11.

Пусть $\mathcal{F}$, Q - те же, как в параграфе 1.2 и, кроме того, пусть

$$Q_1=\{\nu\in Q\colon \nu(B)=\nu(B\cap\mathbb{R}_+),\ B\in\mathcal{F}\}\,,$$

$$Q_2=\{\mu\in Q\colon \mu(B)=\mu(-B),\ B\in\mathcal{F}\}\,,$$

$$Q_{11}=\{\nu\in Q_1\colon \int_0^\infty x^s d\nu(x)=D_s^s,\ \int_0^\infty x^t d\nu(x)=A\}\,,$$

$$Q_{12}=\{\nu\in Q_1\colon \int_0^\infty x^s d\nu(x)\leq D_s^s,\ \int_0^\infty x^t d\nu(x)\leq A\},$$

$$Q_{21}=\{\mu\in Q_2:\ \int_{-\infty}^{\infty}|x|^s d\mu(x)=D_s^s,\ \ \int_{-\infty}^{\infty}|x|^t d\mu(x)=A\},$$

$$Q_{22}=\{\mu\in Q_2:\ \int_{-\infty}^{\infty}|x|^s d\mu(x)\le D_s^s,\ \ \int_{-\infty}^{\infty}|x|^t d\mu(x)\le A\}.$$

Очевидно, что

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{1i}(s,t,A,D_s)} ES_n^t = \sup_{v\in Q_{1i}}\ \sup_{(\xi,n)\in W_1(v)} ES_n^t,$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{1,i+2}(s,t,A,D_s)} ES_n^t = \sup_{v\in Q_{1i}}\ \sup_{(\xi,n)\in W_2(v)} ES_n^t,$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2i}(s,t,A,D_s)} E|S_n|^t = \sup_{\mu\in Q_{2i}}\ \sup_{(\xi,n)\in W_1(\mu)} E|S_n|^t,$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2,i+2}(s,t,A,D_s)} E|S_n|^t = \sup_{\mu\in Q_{2i}}\ \sup_{(\xi,n)\in W_2(\mu)} E|S_n|^t,\ i=1,2.$$

Применяя теоремы 1.2, 1.3 и замечания 1.3, 1.4, получаем следующую лемму.

Лемма 1.3. Если $t\ge 1$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{1i}(s,t,A,D_s)} ES_n^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{1,i+2}(s,t,A,D_s)} ES_n^t = \sup_{v\in Q_{1i}} E(T(v))^t,\quad i=1,2.$$

Если $t\ge 3$, то

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2i}(s,t,A,D_s)} E|S_n|^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{2,i+2}(s,t,A,D_s)} E|S_n|^t = \sup_{\mu\in Q_{2i}} E|T(\mu)|^t,\quad i=1,2.$$

Пусть

$$K(t,u)=(t-1)(u+1)^{t-2}u/((u+1)^{t-1}-1),$$

$$L(t,u)=((1+u)^{t-1}+(t-1)(1+u)^{t-2}-t)/((1+u)^{t-1}-1),$$

$$M(t,u)=(t-1)E|\epsilon u+1|^{t-2}\epsilon u/(E|\epsilon u+1|^{t-2}(\epsilon u+1)-1),$$

$$N(t,u)=(E|\epsilon+u|^{t-2}(t+\epsilon u)-t)/(E|\epsilon+u|^{t-2}(1+\epsilon u)-1).$$

Положим

$$K_1(t)=\inf_{u>0} K(t,u), \quad K_2(t)=\sup_{u>0} K(t,u),$$

$$L_1(t)=\inf_{u>0} L(t,u), \quad L_2(t)=\sup_{u>0} L(t,u),$$

$$M_1(t)=\inf_{u>0} M(t,u), \quad M_2(t)=\sup_{u>0} M(t,u),$$

$$N_1(t)=\inf_{u>0} N(t,u), \quad N_2(t)=\sup_{u>0} N(t,u).$$

Лемма 1.4. Справедливы следующие соотношения:

$$K_1(t)=L_1(t)=t-1\ , \quad K_2(t)=L_2(t)=1\ , \quad 1<t<2\ , \tag{1.56}$$

$$K_1(t)=L_1(t)=1\ , \quad K_2(t)=L_2(t)=t-1\ , \quad t\geq 2\ , \tag{1.57}$$

$$M_1(t)=t-2\ , \quad N_2(t)=2\ , \quad 2<t<4\ , \tag{1.58}$$

$$M_2(t)=2\ , \quad N_1(t)=t-2\ , \quad 3\leq t<4\ , \tag{1.59}$$

$$M_1(t)=N_1(t)=2\ , \quad M_2(t)=N_2(t)=t-2\ , \quad t\geq 4\ . \tag{1.60}$$

Доказательство. Поскольку $1\leq(1+u)^{2-t}\leq 1+(2-t)u$ при $1<t<2$, $u>0$ и $1+(2-t)u\leq(1+u)^{2-t}\leq 1$ при $t\geq 2$, $u>0$, имеем, что $t-1\leq K(t,u)\leq 1$, $t-1\leq L(t,u)\leq 1$ для $1<t<2$, $u>0$ и $1\leq K(t,u)\leq t-1$, $1\leq L(t,u)\leq t-1$ для $t\geq 2$, $u>0$.

Так как $\lim\limits_{u\to 0} K(t,u) = \lim\limits_{u\to\infty} L(t,u) = 1$ и $\lim\limits_{u\to\infty} K(t,u) = \lim\limits_{u\to 0} L(t,u) = t-1$, получаем соотношения (1.42), (1.43).

Неравенства $M(t,u)\geq t-2$ и $N(t,u)\leq 2$ можно переписать в виде

$$f(u) = (t-2)E|\epsilon+u|^{t-2}-E|\epsilon+u|^{t-2}\epsilon u-(t-2) \leq 0\ .$$

Для $u\geq 1$, $0\leq a<1$ справедливы следующие неравенства:

$$(u+a)(u-1)^a \leq (u+a)(1-a/u+a(a-1)/(2u^2))u^a \leq$$

$$\leq (u-a)(1+a/u+a(a-1)/(2u^2))u^a \leq (u-a)(u+1)^a\ ,$$

то есть

$$aE|\epsilon+u|^a \leq E|\epsilon+u|^a\epsilon u\ .$$

Следовательно, $f(u)\leq 0$ при $t\in(2,3)$, $u\geq 1$ и $f'(u)\leq 0$ при $t\in[3,4)$, $u\geq 1$.

Поскольку для $0\leq u<1$ и $0\leq a<1$

$$E|\epsilon+u|^{a} \leq 1,$$

$$(a-u)(1+u)^{a} \leq (u+a)(1-u)^{a},$$

получаем, что $f(u) \leq 0$ при $t \in (2,3)$, $0 \leq u < 1$ и $f'(u) \leq 0$ при $t \in [3,4)$, $0 \leq u < 1$.

Комбинируя полученные соотношения и учитывая равенство $f(0)=0$, заключаем, что $f(u) \leq 0$ при $t \in (2,4)$ и $u \geq 0$. Значит, $M(t,u) \geq t-2$ и $N(t,u) \leq 2$ при $t \in (2,4)$ и $u > 0$. Так как

$$\lim_{u\to\infty} M(t,u) = t-2 \quad \text{и} \quad \lim_{u\to\infty} N(t,u) = 2, \tag{1.47}$$

получаем соотношение (1.44).

Неравенства $M(t,u) \leq 2$ и $N(t,u) \geq t-2$ эквивалентны соотношениям

$$g(u) = (t-3)E|\epsilon u+1|^{t-3}(\epsilon u+1)-(t-1)E|\epsilon u+1|^{t-2}+2 \leq 0.$$

Нетрудно проверить справедливость следующих неравенств:

$$(au-1)(u+1)^{a}-(au+1)(u-1)^{a} \leq 0$$

при $u \geq 1$, $0 \leq a < 1$,

$$(au+1)(1-u)^{a} \leq (au+1)(1-au+a(a-1)u^{2}/2) \leq$$

$$\leq (1-au)(1+au+a(a-1)u^{2}/2) \leq (1-au)(u+1)^{a}$$

при $0 \leq u < 1$, $0 \leq a < 1$. Поскольку

$$g'(u) = ((t-1)/2)(((t-3)u-1)(u+1)^{t-3}-((t-3)u+1)(u-1)^{t-3})$$

при $u \geq 1$ и

$$g'(u) = ((t-1)/2)(((t-3)u+1)(1-u)^{t-3}-(1-(t-3)u)(u+1)^{t-3})$$

при $0 \leq u < 1$, получаем, что $g'(u) \leq 0$ для $t \in [3,4)$, $u \geq 0$. Так как $g(0)=0$ заключаем, что $g(u) \leq 0$ при $t \in [3,4)$, $u \geq 0$. Следовательно, $M(t,u) \leq 2$ и $N(t,u) \geq t-2$ для $t \in [3,4)$, $u \geq 0$. Комбинируя это с соотношениями

$$\lim_{u\to 0} M(t,u) = 2 \quad \text{and} \quad \lim_{u\to 0} N(t,u) = t-2 \tag{1.48}$$

получаем (1.45). Из доказательств лемм 3.2 и 3.3 работы [15] следует, что $f(u) \geq 0$ и $g(u) \geq 0$ при $t \geq 4$, $u > 0$. Учитывая соотношения (1.61), (1.62), получаем (1.60). Лемма доказана.

Пусть $g_0, g_1, \ldots, g_k$ - произвольные непрерывные и линейно независимые функции на $\mathbb{R}$, $C(a_1,\ldots,a_k)$ - множество с.в. X, удовлетворяющих k условиям

$Eg_i(X)=a_i$, $i=1,\dots,k$, C_k - подмножество C, в котором каждая X принимает не более $k+1$ значений. Следующая лемма является очевидным следствием результатов, полученных в [31] и [35].

Лемма 1.5 [4, стр. 235].

Если $\sup\limits_{X\in C} Eg_0(X)<\infty$, то $\sup\limits_{X\in C} Eg_0(X) = \sup\limits_{X\in C_k} Eg_0(X)$.

Замечание 1.12. С. А. Утевым [15] было замечено, что в задаче нахождения экстремумов $Eg_0(X)$ на множестве симметричных с.в X с фиксированными $Eg_i(X)=a_i$, $i=1,\dots,k$, достаточно рассматривать только с.в. X, которые принимают не более чем $2k+1$ значений. Это утверждение можно легко доказать при помощи небольшой модификации рассуждений В. Геффдинга [31]. Нетрудно показать также, что при предположении неотрицательности с.в. X достаточно рассматривать только с.в., принимающие не более чем $k+1$ значение, одно из которых равно нулю.

Лемма 1.6. Пусть ξ - неотрицательная с.в. с $E\xi^s=a^s$, $E\xi^t=b$, $z\geq 0$. Если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то

$$E(\xi+z)^t \leq E(U(a,b,s,t)+z)^t . \tag{1.63}$$

Если $1<t<2$, $1\leq s<t$ или $t\geq 2$, $t-1\leq s<t$, то

$$E(\xi+z)^t \geq E(U(a,b,s,t)+z)^t . \tag{1.64}$$

Доказательство. В силу замечания 1.12 достаточно рассмотреть лишь с.в. ξ, которые принимают три значения $0, x, y$, где $x, y > 0$. Пусть $P(\xi=x)=p$, $P(\xi=y)=q$, $0<x<y$, $p+q\leq 1$, $x^sp+y^sq=a^s$, $x^tp+y^tq=b$. Поскольку $E\xi^t=EU^t(a,b,s,t)=b$, можно считать, что $z>0$. Неравенства (1.63) и (1.64) можно переписать в форме

$$f_1(x^{t-s})p(x,y)+f_1(y^{t-s})q(x,y) \leq f_1(u) , \tag{1.65}$$

$$f_1(x^{t-s})p(x,y)+f_1(y^{t-s})q(x,y) \geq f_1(u) , \tag{1.66}$$

соответственно, где $p(x,y)=(y^{t-s}-b/a^s)/(y^{t-s}-x^{t-s})$, $q(x,y)=(b/a^s-x^{t-s})/(y^{t-s}-x^{t-s})$, $f_1(v)=v^{-s/(t-s)}((v^{1/(t-s)}+z)^t-z^t)$, $v>0$. Так как

$$\begin{aligned} f_1''(v)&=(st/(t-s)^2)v^{-s/(t-s)-2}((v^{1/(t-s)}+z)^t-z^t)-\\ &-((s+t-1)t/(t-s)^2)v^{-(s-1)/(t-s)-2}(v^{1/(t-s)}+z)^{t-1}+\\ &+(t(t-1)/(t-s)^2)v^{-(s-2)/(t-s)-2}(v^{1/(t-s)}+z)^{t-2} , \end{aligned}$$

применяя лемму 1.4, получаем, что функция $f_1(v)$ вогнута по $v>0$, если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, и выпукла по $v>0$, если $1<t<2$, $1\leq s<t$ или

$t \geq 2$, $t\text{-}1 \leq s < t$.

Поскольку

$$p(x,y) \geq 0,\ q(x,y) \geq 0,$$

$$p(x,y) + q(x,y) = 1,$$

$$x^{t-s}p(x,y) + y^{t-s}q(x,y) = b/a^s,$$

это влечет неравенство (1.65) для $1<t<2$, $0<s\leq t\text{-}1$ и $t\geq 2$, $0<s\leq 1$ и неравенство (1.66) для $1<t<2$, $1\leq s<t$ и $t\geq 2$, $t\text{-}1\leq s<t$. Лемма доказана.

Лемма 1.7. Если $1<t<2$, $0<s\leq t\text{-}1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, $0<a_1\leq a_2$, $0<b_1\leq b_2$, $a_i^t\leq b_i$, $i=1,2$, $z\geq 0$, то

$$E(U(a_1,b_1,s,t)+z)^t \leq E(U(a_2,b_2,s,t)+z)^t. \tag{1.67}$$

<u>Доказательство.</u> Нетрудно видеть, что (1.67) эквивалентно неравенству

$$f_1(y_1)r \leq f_1(y_2), \tag{1.68}$$

где $r=a_1{}^s/a_2{}^s$, $y_i=b_i/a_i^s$, $i=1,2$. Очевидно, что $0<r\leq 1$, $y_1q\leq y_2$, $y_1,y_2>0$. Пусть $r<1$. Положим $x=(y_2\text{-}ry_1)/(1\text{-}r)$. При условиях леммы функция $f_1(v)$ неотрицательна и вогнута. Следовательно,

$$f_1(y_1)r \leq f_1(y_1)r+f_1(x)(1\text{-}r)\leq f_1(y_1r+x(1\text{-}r)) = f_1(y_2).$$

Легко видеть, что при условиях леммы функция $f_1(v)$ не убывает по $v>0$. Это влечет (1.68) для $r=1$. Лемма доказана.

Из лемм 1.6 и 1.7 следует следующая

Лемма 1.8. Пусть ξ, η, $U(a,b,s,t)$ - независимые неотрицательные с.в., $E\eta^t<\infty$, $a,b\geq 0$, $a^t\leq b$. Если $E\xi^s\leq a^s$, $E\xi^t\leq b$, $1<t<2$, $0<s\leq t\text{-}1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то

$$E(\xi+\eta)^t \leq E(U(a,b,s,t)+\eta)^t.$$

Если $E\xi^s=a^s$, $E\xi^t=b$, $1<t<2$, $1\leq s<t$ или $t\geq 2$, $t\text{-}1\leq s<t$, то

$$E(\xi+\eta)^t \geq E(U(a,b,s,t)+\eta)^t.$$

Следующие леммы 1.9 и 1.10 для $t\geq 2$, $s=2$ получены в [15] ([15, леммы 9.1, 9.2].

Лемма 1.9. Пусть ξ, η - независимые неотрицательные с.в., $E\xi^s=a^s$, $E\xi^t<\infty$, $E\eta^t<\infty$, $a>0$. Если $1<t<2$, $0<s\leq t\text{-}1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то

$$E(\xi+\eta)^t - E\xi^t \geq E(a+\eta)^t - a^t.$$

Если $1<t<2$, $1\leq s<t$ или $t\geq 2$, $t\text{-}1\leq s<t$, то

$$E(\xi+\eta)^t - E\xi^t \leq E(a+\eta)^t - a^t.$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенства

$$E(\xi+z)^t - E\xi^t \geq E(a+z)^t - a^t \tag{1.69}$$

для $z\geq 0$, $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ и $t\geq 2$, $0<s\leq 1$,

$$E(\xi+z)^t - E\xi^t \leq E(a+z)^t - a^t \tag{1.70}$$

для $z\geq 0$, $1<t<2$, $1\leq s<t$ и $t\geq 2$, $t-1\leq s<t$.

Достаточно рассмотреть лишь с.в. ξ, которые принимают три значения $0, x, y,$ где $x,y>0$. Пусть $P(\xi=x)=p$, $P(\xi=y)=q$, $p+q\leq 1$, $x^s p+y^s q=a^s$. Неравенства (1.69) и (1.70) эквивалентны неравенствам

$$g_1(x^s)p+g_1(y^s)q\geq g_1(a^s), \tag{1.71}$$

$$g_1(x^s)p+g_1(y^s)q\leq g_1(a^s) \tag{1.72}$$

соответственно, где $g_1(v)=(v^{1/s}+z)^t-v^{t/s}-z^t$. Положим $u=v^{-1/s}z$. Поскольку

$$g_1''(v)=(t/s^2)v^{t/s-2}((1-s)(1+u)^{t-1} + (t-1)(1+u)^{t-2} - (t-s)),$$

из леммы 1.4 следует, что функция $g_1(v)$ выпукла по $v>0$, если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, и выпукла по $v>0$, если $1<t<2$, $1\leq s<t$ или $t\geq 2$, $t-1\leq s<t$. Следовательно, если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то

$$g_1(x^s)p+g_1(y^s)q = (g_1(x^s)p/(p+q)+g_1(y^s)q/(p+q))(p+q) \geq$$

$$\geq g_1(a^s/(p+q))(p+q) = g_1(a^s/(p+q))(p+q)+g_1(0)(1-p-q) \geq g_1(a^s).$$

Таким образом, неравенство (1.71) имеет место. Аналогично, если $1<t<2$, $1\leq s<t$ или $t\geq 2$, $t-1\leq s<t,$ то, используя вогнутость $g_1(v)$, получаем неравенство (1.72). Лемма доказана.

Лемма 1.10. Пусть $a,b\geq 0$, $a^t\leq b$. Пусть η - неотрицательная с.в. с конечным t-м моментом, C - множество неотрицательных с.в. ξ, которые не зависят от η и удовлетворяют условиям $E\xi^s=a^s$, $E\xi^t=b$. Если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то

$$\inf_{\xi\in C} E(\xi+\eta)^t = b + E(a+\eta)^t - a^t.$$

Если $1<t<2$, $1\leq s<t$ или $t\geq 2$, $t-1\leq s<t$, то

$$\sup_{\xi\in C} E(\xi+\eta)^t = b + E(a+\eta)^t - a^t.$$

Доказательство. Из леммы 1.9 следует, что достаточно найти последовательность неотрицательных с.в. ξ_n, которые не зависят от η и удовлетворяют условиям $E\xi_n^s=a^s$, $E\xi_n^t=b,$

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi_n+\eta)^t = b + E(a+\eta)^t - a^t .$$

Если $b=a^t$, то достаточно взять $\xi_n=a$. Пусть $a^t<b$. По аналогии с доказательством леммы 7.6 в [15] положим $\delta_n=1/n$, $P(\xi_n=a)=1-\delta_n$, $P(\xi_n=b_n)=\delta_n^*$, $P(\xi_n=0)=\delta_n-\delta_n^*$, где $\delta_n^*=a^s\delta_n/b_n^s$, $b_n=((b-a^t(1-\delta_n))/(a^s\delta_n))^{1/(t-s)}$. Очевидно, что $b_n\geq a$, $0\leq\delta_n^*\leq\delta_n$, $\delta_n\to 0$, $b_n\to\infty$, $b_n^t\delta_n^*\to b-a^t$.

Имеем, что

$$E(\xi_n+\eta)^t = E(a+\eta)^t(1-\delta_n)+E\eta^t(\delta_n-\delta_n^*)+(E(b_n+\eta)^t-b_n^t)\delta_n^*+b_n^t\delta_n^* .$$

Достаточно проверить, что $(E(b_n+\eta)^t-b_n^t)\delta_n^*\to 0$. Так как (см. лемму 7.5 в [15])

$$|\,|1+x|^t-1\,|\leq 2^t t(|x|+|x|^t)$$

для всех $t\geq 1$, $x\in\mathbb{R}$, получаем, что

$$(E(b_n+\eta)^t-b_n^t)\delta_n^* \leq b_n^t\delta_n^* 2^t t(E\eta/b_n+E\eta^t/b_n) \to 0 .$$

Лемма доказана.

Лемма 1.11. Пусть ξ - симметрично распределенная с.в. с $E|\xi|^s=a^s$, $E|\xi|^t=b$, $z\geq 0$. Если $2<t<4$, $0<s\leq t-2$ или $t\geq 4$, $0<s\leq 2$, то

$$E|\xi+z|^t \leq E|V(a,b,s,t)+z|^t . \qquad (1.73)$$

Если $3\leq t<4$, $2\leq s<t$ or $t\geq 4$, $t-2\leq s<t$, то

$$E|\xi+z|^t \leq E|V(a,b,s,t)+z|^t . \qquad (1.74)$$

<u>Доказательство.</u> В силу замечания 1.12 достаточно рассмотреть лишь симметрично распределенные с.в. ξ, которые принимают 5 значений. Пусть $P(\xi=\pm x)=p/2$, $P(\xi=\pm y)=q/2$, $0<x<y$, $p+q\leq 1$, $x^sp+y^sq=a^s$, $x^tp+y^tq=b$. Поскольку $E|\xi|^t = E|V(a,b,s,t)|^t=b$, можно считать, что $z>0$. Неравенства (1.73) и (1.74) можно переписать как

$$f_2(x^{t-s})p(x,y)+f_2(y^{t-s})q(x,y) \leq f_2(b/a^s) , \qquad (1.75)$$

$$f_2(x^{t-s})p(x,y)+f_2(y^{t-s})q(x,y) \geq f_2(b/a^s) , \qquad (1.76)$$

где $f_2(v)=v^{-s/(t-s)}(E|\epsilon v^{1/(t-s)}+z|^t-z^t)$, $v>0$, и $p(x,y)$, $q(x,y)$ - такие же, как в доказательстве леммы 1.6. Так как

$$f_2''(v)=(st/(t-s)^2)v^{-s/(t-s)-2}(E|\epsilon v^{1/(t-s)}+z|^t-z^t)-$$
$$-(s+t-1)t/(t-s)^2)v^{-(s-1)/(t-s)-2}(E|\epsilon v^{1/(t-s)}+z|^{t-2}(\epsilon v^{1/(t-s)}+z)\epsilon+$$
$$+(t(t-1)/(t-s)^2)v^{-(s-2)/(t-s)-2}E|\epsilon v^{1/(t-s)}+z|^{t-2} ,$$

из леммы 1.4 следует, что функция $f_2(v)$ вогнута по $v>0$, если $2<t<4$, $0<s\leq t-2$ или $t\geq 4$, $0<s\leq 2$, и выпукла по $v>0$, если $3\leq t<4$,

$0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$. Поскольку

$$p(x,y)\ge 0,\ q(x,y)\ge 0,$$
$$p(x,y)+q(x,y)=1,$$
$$x^{t-s}p(x,y)+y^{t-s}q(x,y)=b/a^s,$$

получаем (1.75) для $2<t<4$, $0<s\le t\text{-}1$ и $t\ge 2$, $0<s\le 1$ и (1.76) для $3\le t<4$, $2\le s<t$ и $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$. Лемма доказана.

Лемма 1.12. Если $2<t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, $0<a_1\le a_2$, $0<b_1\le b_2$, $a_i^t\le b_i$, $i=1,2$, $z\ge 0$, то

$$E\,|\,V(a_1,b_1,s,t)+z\,|^t \le E\,|\,V(a_2,b_2,s,t)+z\,|^t. \tag{1.77}$$

Доказательство. Неравенство (1.77) можно переписать в виде

$$f_2(y_1)r \le f_2(y_2), \tag{1.78}$$

где $r=a_1^s/a_2^s$, $y_i=b_i/a_i^s$, $i=1,2$. По аналогии с доказательством леммы 1.7 из неотрицательности и вогнутости $f_2(v)$ следует неравенство (1.78) в случае $r<1$ и из неубывания f_2 следует (1.78) в случае $r=1$. Лемма доказана.

Из лемм 1.11 и 1.12 следует следующая

Лемма 1.13. Пусть ξ, η, $V(a,b,s,t)$ - независимые с.в., ξ симметрично распределена, $E\,|\,\eta\,|^t<\infty$, $a,b\ge 0$, $a^t\le b$. Если $E\,|\,\xi\,|^s\le a^s$, $E\,|\,\xi\,|^t\le b$, $2<t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le 2$, то

$$E\,|\,\xi+\eta\,|^t \le E\,|\,V(a,b,s,t)+\eta\,|^t.$$

Если $E\,|\,\xi\,|^s=a^s$, $E\,|\,\xi\,|^t=b$, $3\le t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$, то

$$E\,|\,\xi+\eta\,|^t \ge E\,|\,V(a,b,s,t)+\eta\,|^t.$$

Лемма 1.14. Пусть ξ, η, ϵ - независимые с.в., ξ симметрично распределена, $E\,|\,\xi\,|^s=a^s$, $E\,|\,\xi\,|^t<\infty$, $E\,|\,\eta\,|^t<\infty$, $a>0$. Если $2<t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$, то

$$E\,|\,\xi+\eta\,|^t - E\,|\,\xi\,|^t \le E\,|\,\epsilon a+\eta\,|^t - a^t.$$

Если $3\le t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le t$, то

$$E\,|\,\xi+\eta\,|^t - E\,|\,\xi\,|^t \ge E\,|\,\epsilon a+\eta\,|^t - a^t.$$

Доказательство. В силу симметричности распределений с.в. ξ и ϵ достаточно рассмотреть случай $\eta=z>0$. Покажем, что если $2<t<4$, $2\le s<t$ или $t\ge 4$, $t\text{-}2\le s<t$, то

$$E\,|\,\xi+z\,|^t - E\,|\,\xi\,|^t \le E\,|\,\epsilon a+z\,|^t - a^t \tag{1.79}$$

и если $3\le t<4$, $0<s\le t\text{-}2$ или $t\ge 4$, $0<s\le t$, то

$$E|\xi+z|^t - E|\xi|^t \geq E|\epsilon a+z|^t - a^t . \tag{1.80}$$

Достаточно рассмотреть только симметрично распределенные с.в. ξ, которые принимают 5 значений. Пусть $P(\xi=\pm x)=p/2$, $P(\xi=\pm y)=q/2$, $0<x<y$, $p+q\leq 1$, $x^s p + y^s q = a^s$. Перепишем (1.79) и (1.80) в виде

$$g_2(x^s)p+g_2(y^s)q \leq g_2(a^s) , \tag{1.81}$$

$$g_2(x^s)p+g_2(y^s)q \geq g_2(a^s) , \tag{1.82}$$

где $g_2(v)=E|\epsilon v^{1/s}+z|^t - v^{t/s} - z^t$, $v>0$. Положим $u=v^{-1/s}z$. Так как

$$g_2''(v)=(t/s^2)v^{t/s-2}((t-s)E|\epsilon+u|^{t-2} - (s-1)E|\epsilon+u|^{t-2}\epsilon u - (t-s)) ,$$

получаем, что функция $g_2(v)$ выпукла по $v>0$, если $2<t<4$, $0<s\leq t-2$ или $t\geq 4$, $0<s\leq 2$ и вогнута по $v>0$, если $3\leq t<4$, $0<s\leq t-2$ или $t\geq 4$, $0<s\leq 2$. Если $2<t<4$, $2\leq s<t$ или $t\geq 4$, $t-2\leq s<t$, имеем, что

$$g_2(x^s)p+g_1(y^s)q = (g_2(x^s)p/(p+q)+g_2(y^s)q/(p+q))(p+q) \leq$$

$$\leq g_2(a^s/(p+q))(p+q) = g_2(a^s/(p+q))(p+q)+g_2(0)(1-p-q) \leq g_2(a^s) ,$$

то есть неравенство (1.81) справедливо. Аналогично, если $3\leq t<4$, $0<s\leq t-2$ или $t\geq 4$, $0<s\leq t$, то, используя выпуклость $g_2(v)$, получаем неравенство (1.82). Лемма доказана.

Лемма 1.15. Пусть $a,b\geq 0$, $a^t\leq b$. Пусть η - с.в. с конечным t-м моментом, C - множество симметрично распределенных с.в. ξ, которые не зависят от η и удовлетворяют условиям $E|\xi|^s=a^s$, $E|\xi|^t=b$. Если $2<t<4$, $2\leq s<t$ или $t\geq 4$, $t-2\leq s<t$, то

$$\sup_{\xi\in C} E|\xi+\eta|^t = b + E|\epsilon a+\eta|^t - a^t .$$

Если $3\leq t<4$, $0<s\leq t-2$ или $t\geq 4$, $0<s\leq t$, то

$$\inf_{\xi\in C} E|\xi+\eta|^t = b + E|\epsilon a+\eta|^t - a^t .$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.6 работы [15].

Положим $d=(D_s^t/A)^{s/(t-s)}$.

Доказательство теоремы 1.9. Последовательно применяя леммы 1.8 и 1.10, получаем соотношения (1.32), (1.34), (1.36), (1.37). Соотношение (1.35) является очевидным следствием (1.34). Соотношение (1.38) следует из (1.37) и теоремы 1.4. Если $1<t<2$, $0<s\leq t-1$ или $t\geq 2$, $0<s\leq 1$, то лемма 1.3 и уже доказанное соотношение (1.33) влекут, что

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{11}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{13}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_n E(\sum_{i=1}^n U_i(D_s n^{-1/s}, An^{-1}, s, t))^t =$$

$$= (A/D_s^s)^{t/(t-s)} \sup_n E(\sum_{i=1}^n X_i(d/n))^t , \tag{1.83}$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{12}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{14}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_{\substack{0<A'\le A\\ 0<D'_s\le D_s}} \sup_{(\xi,n)\in U_{13}(s,t,A',D'_s,\mathbf{R})} ES_n^t =$$

$$= \sup_n \sup_{\substack{0<A'\le A\\ 0<D'_s\le D_s}} E(\sum_{i=1}^n U_i(D_s' n^{-1/s}, A'n^{-1}, s, t))^t = \sup_n E(\sum_{i=1}^n U_i(D_s n^{-1/s}, An^{-1}, s, t))^t . \tag{1.84}$$

Применяя (1.12), получаем, что

$$\sup_n E(\sum_{i=1}^n X_i(d/n))^t = E\theta^t(A,D_s) . \tag{1.85}$$

Используя (1.83)-(1.85), приходим к соотношению (1.33).

Если $1<t<2$, $s=1$, то, применяя лемму 1.3 и уже доказанное соотношение (1.36), получаем, что

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{11}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{13}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_n (A+D_1^t - D_1^t/n^{t-1}) = A+D_1^t , \tag{1.86}$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{12}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{14}(1,t,A,D_1,\mathbf{R})} ES_n^t = \sup_{\substack{0<A'\le A\\ 0<D'_1\le D_1}} (A'+D_1'^t) = A+D_1^t . \tag{1.87}$$

Из (1.86) и (1.87) следует соотношение (1.39).

Докажем (1.40). Положим

$L(A,D_1) = \inf G_1(a,b,n,t)$, $1<t<2$,

$L(A,D_1) = \inf F_1(a,b,n,t)$, $t\ge 2$,

где $\inf$ берется по всем неотрицательным a_i, b_i, $i=1,\dots,n,$ и натуральным n таким, что

$$b_i \ge a_i^t , \ i=1,\dots,n , \ \sum_{i=1}^n a_i = D_1 , \ \sum_{i=1}^n b_i = A .$$

В силу уже доказанных соотношений (1.34) и (1.37) достаточно показать, что

$$L(A,D_1) = \max(A, D_1^t) .$$

Легко видеть, что

$$L(A,D_1)\geq max(A,D_1^t)\ . \tag{1.88}$$

Пусть $A<D_1^t$. Возьмем натуральное $n\geq n_0(A,D_1)$. Нетрудно проверить, что система

$$x+(n-1)y=D_1\ ,$$

$$x^t+(n-1)y^t=A\ ,\ x\geq 0,\ y\geq 0$$

имеет некоторое решение $x=a_{01}$, $y=a_{02}$. Выбирая $a_1=a_{01}$, $b_1=a_1^t$, $a_i=a_{02}$, $b_i=a_i^t$, $i=2,\dots,n$, имеем, что $L(A,D_1)\leq G_1(a,b,n,t)=D_1^t$. Из последнего неравенства и (1.88) следует, что $L(A,D_1)=D_1^t$ в случае $A<D_1^t$.

Пусть $A\geq D_1^t$. Полагая $n=1$, $a_1=D_1$, $b_1=A$, получаем, что $L(A,D_1)\leq A$. Последнее неравенство и (1.88) влекут, что $L(A,D_1)=A$ в случае $A\geq D_1^t$.

Следовательно, $L(A,D_1)=max(A,D_1^t)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.10. Соотношения (1.41), (1.43)-(1.45) являются очевидными следствиями лемм 1.13 и 1.15. (1.46) следует из (1.45), теоремы 1.6 и замечания 1.6. (1.48) является следствием (1.43) и результатов М. Л. Итона (M. L. Eaton) [26]. Докажем соотношение (1.47). Пусть

$$B_1^n(A,D_2)=\{(a,n),\ (b,n):\ a_i\geq 0,\ b_i\geq 0,\ a_i^t\leq b_i,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^n a_i^2=D_2^2,\ \sum_{i=1}^n b_i=A\}\ ,$$

$$B_2^n(A,D_2)=\{(a,n),\ (b,n):\ a_i\geq 0,\ b_i\geq 0,\ a_i^t\leq b_i,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^n a_i^2\leq D_2^2,\ \sum_{i=1}^n b_i\leq A\}\ ,$$

$$B_i(A,D_2)=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_i^n(A,D_2)\ ,\quad i=1,2\ .$$

Поскольку (см. [29])

$$E|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i|^t\ \leq\ (2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})D_2^t$$

для $\sum_{i=1}^n a_i^2=D_2^2$, то, применяя уже доказанное соотношение (1.37), получаем, что при $k=1,2$ имеет место:

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2k}(2,t,A,D_2)} E|S_n|^t\ =\ \sup_{(a,n),\ (b,n)\in B_k(A,D_2)}\ \sup_{(\xi,n)\in M_1(n,2,t,a,b)} E|S_n|^t\ =$$

$$=\ \sup_{(a,n),\ (b,n)\in B_k(A,D_2)} \sum_{i=1}^n(b_i-a_i^t)+E|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i|^t\ \leq\ A+\ (2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})D_2^t\ .$$

Так как

$$A+\sup_n D_2^t(E|\textstyle\sum^n_{i=1}\epsilon_i/n^{1/2}|^t n^{1-t/2})=A\ +(2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})D_2^t\ ,$$

получаем, что

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{2k}(2,t,A,D_2)} E|S_n|^t = A + (2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})D_2^t, \quad k=1,2,3,4,$$

для $2<t<4$. Соотношение (1.47) доказано.

Докажем соотношение (1.42). Применяя лемму 1.3 и уже доказанное соотношение (1.41), получаем для $3\le t<4$, $0<s\le t-2$ и $t\ge 4$, $0<s\le 2$, что

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{21}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t = \sup_n E|\sum_{i=1}^n V_i(D_s n^{-1/s},An^{-1},s,t)|^t =$$

$$= (A/D_s^s)^{t/(t-s)}\sup_n E|\sum_{i=1}^n Y_i(d/n)|^t, \tag{1.89}$$

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{22}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t = \sup_{(\xi,n)\in U_{24}(s,t,A,D_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t = \sup_{\substack{0<A'\le A\\ 0<D'_s\le D_s}} \sup_{(\xi,n)\in U_{23}(s,t,A',D'_s,\mathbf{R})} E|S_n|^t =$$

$$= \sup_n \sup_{\substack{0<A'\le A\\ 0<D'_s\le D_s}} E|\sum_{i=1}^n V_i(D_s' n^{-1/s},A'n^{-1},s,t)|^t = \sup_n E|\sum_{i=1}^n V_i(D_s n^{-1/s},An^{-1},s,t)|^t \tag{1.90}$$

В силу (1.14)

$$\sup_n E|\sum_{i=1}^n Y_i(d/n)|^t = E|\theta_1(A,D_s)-\theta_2(A,D_s)|^t. \tag{1.91}$$

Из (1.89)-(1.91) следует (1.42). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.11. Теорема 1.11 следует из теоремы 1.9 и неравенства

$$E\|\sum_{i=1}^n \xi_i\|^t \ge E(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2)^t, \quad t>2,$$

по аналогии с теоремой 7 работы [15].

1.5. Точные константы в моментных неравенствах Розенталя для симметрично распределенных и неотрицательных случайных величин. Уточнения неравенств Розенталя.

Теорема 1.12. Точная константа в неравенстве (1.1) имеет вид

$$A^*(1)=1, \tag{1.92}$$

$$A^*(t)=2^{1/t}, \quad 1<t<2, \tag{1.93}$$

$$A^*(t)=\|\theta\|_t, \quad t\geq 2, \tag{1.94}$$

где θ - пуассоновская с.в. с параметром 1.

Доказательство. Соотношение (1.92) очевидно. Положим

$$F_1(M) = \sup_{(\xi,n)\in U_1(1,t,M,\mathbb{R})} ES_n^t .$$

Применяя очевидные неравенства

$$\sup_{(\xi,n)\in U_{11}(1,t,M,M^{1/t},\mathbb{R})} ES_n^t \leq F_1(M) \leq \sup_{(\xi,n)\in U_{12}(1,t,M,M^{1/t},\mathbb{R})} ES_n^t$$

и соотношения (1.33), (1.40) , мы имеем, что $F_1(M)=2M$ для $1<t<2$ и $F_1(M)=E\theta^t M$ для $t\geq 2$. Поскольку

$$A^*(t) = \sup_{M>0} (F_1(M)/M)^{1/t} ,$$

получаем (1.93) и (1.94). Теорема доказана.

Теорема 1.13. Точная константа в неравенстве (1.2) имеет вид

$$B^*(2)=1, \tag{1.95}$$

$$B^*(t)=(1+2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})^{1/t}, \quad 2<t<4, \tag{1.96}$$

$$B^*(t)=\|\theta_1-\theta_2\|_t, \quad t\geq 4, \tag{1.97}$$

где $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, θ_1, θ_2 - независимые пуассоновские с.в. с параметром $0,5$.

Доказательство. (1.95) очевидно. Пусть

$$F_2(M) = \sup_{(\xi,n)\in U_2(2,t,M,\mathbb{R})} E|S_n|^t .$$

По аналогии с доказательством теоремы 1.12 имеем, что $F_2(M)=(1+2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})M$ при $2<t<4$ и $F_2(M)=E|\theta_1-\theta_2|^t M$ при $t\geq 4$. Используя соотношение

$$B^*(t) = \sup_{M>0} (F_2(M)/M)^{1/t} ,$$

получаем (1.96) и (1.97). Теорема доказана.

Замечание 1.13. Как уже отмечалось во введении, применяя метод симметризации, из (1.2) нетрудно получить (см. [43]), что для всех независимых с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ с $E\xi_i=0$, $E|\xi_i|^t<\infty$, $i=1,\dots,n$, $2\le t<\infty$, справедливо неравенство:

$$B'_1(t)\max\left(\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_2, \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_t^t\right)^{1/t}\right) \le \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_t \le$$

$$\le B'_2(t)\max\left(\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_2, \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_t^t\right)^{1/t}\right) \qquad (1.98)$$

с константами $B'_1(t)\ge 1/2$ и $B'_2(t)\le 2B^*(t)$. Совпадение некоторых наших результатов с известными результатами для случая с.в. с нулевым средним (см. замечание 1.9 после теоремы 1.10) делают правдоподобной гипотезу, что точная константа в неравенстве (1.98) для всех t, $2\le t\le 3$ равна $B^*(t)$. (Недавно автором и Ш. Шарахметовым была найдена точная константа в неравенстве (1.98) для $t=2m$, $m=1,2,\dots$ Интересно отметить, что значения этой константы не совпадают с $B^*(2m)$. Представляется весьма вероятным, что такая же ситуация имеет место и в случае произвольного $t>3$).

Замечание 1.14. В силу замечания 1.10 теорема 1.12 дает точную константу в неравенстве Розенталя

$$\|S_n\|^t \le A(t)M(1,t,n,\xi)$$

для независимых с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $1\le t<\infty$, принимающих значения в произвольном гильбертовом пространстве H. Кроме того, используя это замечание, заключаем, что точная константа неравенстве Розенталя

$$\|S_n\|^t \le B(t)M(2,t,n,\xi)$$

для независимых симметрично распределенных H-значных с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ с конечным t-м моментом, $3\le t<\infty$, дается теоремой 1.13.

Замечание 1.15. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Величины $(A^*(m))^m$ и $(B^*(2m))^{2m}$ имеют простой комбинаторный смысл: $(A^*(m))^m=P_m$, где P_m - число различных разбиений множества, состоящего из m элементов (m-е число Белла). $(B^*(2m))^{2m}=Q_{2m}$, где Q_{2m} - число разбиений множества, состоящего из $2m$ элементов на части, мощности которых суть четные числа. Для вычисления P_m, Q_{2m} полезны следующие формулы:

$$P_m = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^{k} P_k ,$$

$$Q_{2m} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2k+1} Q_{2k} .$$

Следствие 1.2. $\lim_{t\to\infty} A^*(t)\ln t/t = \lim_{t\to\infty} B^*(t)\ln t/t = 1/e$.

Доказательство. По аналогии с вычислением асимптотики чисел Белла [14, стр. 283-285] можно показать, что

$$(A^*(t))^t = (1/(r+1)^{1/2})\exp(t(r+1/r-1)-1)(1+o(1)) , \tag{1.99}$$

где r - единственное решение уравнения $re^r = t$. Поскольку для больших t (см. [2])

$$r = \ln t - \ln\ln t + O(\ln\ln t/\ln t) ,$$

из (1.99) следует, что

$$A^*(t) = t/(e\ln t)(1+o(\ln^2 \ln t/\ln t)) ,$$

то есть

$$\lim_{t\to\infty} A^*(t)\ln t/t = 1/e .$$

Докажем, что

$$\lim_{t\to\infty} B^*(t)\ln t/t = 1/e .$$

Из теоремы 1.13 следует, что

$$(B^*(t))^t = 2/e \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} m^t /(k!(m+k)!2^{m+2k}) .$$

Прежде всего заметим, что

$$2/e \sum_{m=1}^{\infty} m^t /(2^m m!) \le B^t(t) \le (2/e \sum_{m=1}^{\infty} m^t /(2^m m!))(\sum_{k=0}^{\infty} 1/(2^{2k}k!)) \le$$

$$\le 32/(15e)\sum_{m=1}^{\infty} m^t /(2^m m!) . \tag{1.100}$$

Положим $S = \sum_{m=1}^{\infty} m^t /(2^m m!)$. Проведем вычисление асимптотики S по аналогии с вычислением асимптотики чисел Белла [14].

Разобьем S на три суммы:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \sum\nolimits^{\mu-1}_{m=1} + \sum\nolimits^{\nu}_{m=\mu} + \sum\nolimits^{\infty}_{m=\nu+1} ,$$

где $\mu,\nu = [e^r/2 \pm At^{1/2}]$, r - единственное решение уравнения $re^r = 2t$, A - положительная константа.

Применяя формулу Стирлинга, получаем, что (все погрешности имеют экпотенциальный характер):

$$S_2 = (1/(2\pi)^{1/2}) \sum_{-At^{1/2}}^{At^{1/2}} (m+[e^r/2])^{t-m-[e^r/2]-1/2} (e/2)^{[e^r/2]+m} (1+o(1)) =$$

$$= (1/(2\pi(r+1))^{1/2}) (e^r/2)^{t-e^r/2} (e/2)^{e^r/2} \sum_{-At^{1/2}}^{At^{1/2}} \exp(-m^2 r(r+1)/(2t)) (r(r+1)/m)^{1/2} (1+o(1)) =$$

$$= (1/((2\pi(r+1))^{1/2} 2^t)) \exp(t(r + 1/r - 1)) \int_{-A(t(t+1))^{1/2}}^{A(t(t+1))^{1/2}} \exp(-y^2/2)dy \ (1+o(1)) =$$

$$= (1/((r+1)^{1/2} 2^t)) \exp(t(r + 1/r - 1) (1+o(1)) .$$

По аналогии с [14] можно показать, что при некотором A

$$S_1 / S_2 = O((r/t)^{(r+1)/2}/r) ,$$

$$S_3 / S_2 = O((r/t)^{(r+1)/2}/r) .$$

Следовательно,

$$S = (1/((r+1)^{1/2} 2^t)) \exp(t(r + 1/r - 1)) (1+o(1)) ,$$

где r - единственное решение уравнения $re^r = 2t$.

Поскольку для больших t $r = \ln 2t - \ln \ln 2t + O(\ln \ln t/\ln t)$, из соотношения (1.100) следует, что

$$B^*(t) = S^{1/t}(1+o(1/t)) = 0.5 \exp(r + 1/r - 1)(1+o(\ln t/t)) =$$

$$= t/(e \ln t)(1+o(\ln^2 \ln t/\ln t)) .$$

Следствие доказано.

Используя соотношения (1.33) и (1.42) по аналогии с доказательствами теорем 1.12 и 1.13 с учетом замечания 1.10 легко получаем следующие уточнения неравенств (1.1) и (1.2).

Теорема 1.14. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - независимые с.в. с конечным t-м моментом, $1 < t < \infty$, принимающие значения в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве H . Точные константы во всех моментных неравенствах

$$\| S_n \|_t \leq A_1(t)\ M(s,t,n,\xi), \tag{0.3}$$

где $1<t<2,\ 0<s\leq t-1$ или $t\geq 2,\ 0<s\leq 1$, имеют вид

$$A_1^*(t) = \| \theta \|_t$$

(θ - пуассоновская с.в. с параметром 1).

Теорема 1.15. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ - независимые симметрично распределенные с.в. с конечным t-м моментом, $3\le t<\infty$, принимающие значения в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Точные константы во всех моментных неравенствах

$$\|S_n\|_t \le B_1(t)\, M(s,t,n,\xi), \qquad (0.4)$$

где $3\le t<4,\ 0<s\le t-2$ или $t\ge 4,\ 0<s\le 2$, имеют вид

$$B_1{}^*(t) = \|\theta_1 - \theta_2\|_t$$

(θ_1, θ_2 - независимые пуассоновские с.в. с параметром $0{,}5$).

<u>Замечание 1.16.</u> Очевидно, что

$$A_1{}^*(t) = \|\theta\|_t \le A^*(t) = 2^{1/t},$$

при $1<t<2$. Поскольку, как легко видеть, функция

$$f(s) = M(s,t,n,\xi)$$

не возрастает по $s\in(0,t)$, из теорем 1.13 и 1.15 вытекает следующее интересное неравенство, связывающее моменты симметризованной пуассоновской и нормальной с.в.:

$$B_1{}^*(t) = \|\theta_1 - \theta_2\|_t \le B^*(t) = (1 + 2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})^{1/t}$$

при $3\le t<4$. Кроме того, мы имеем, что

$$\min_{0<s\le t-1} \|\theta\|_t\, M(s,t,n,\xi) = \|\theta\|_t\, M(t-1,t,n,\xi),$$

$$\min_{0<s\le t-2} \|\theta_1 - \theta_2\|_t\, M(s,t,n,\xi) = \|\theta_1 - \theta_2\|_t\, M(t-2,t,n,\xi),$$

$$\min_{0<s\le 1} \|\theta\|_t\, M(s,t,n,\xi) = \|\theta\|_t\, M(1,t,n,\xi),$$

$$\min_{0<s\le 2} \|\theta_1 - \theta_2\|_t\, M(s,t,n,\xi) = \|\theta_1 - \theta_2\|_t\, M(2,t,n,\xi).$$

Последние два соотношения показывают, что неравенства Розенталя

$$\|S_n\|_t \le A^*(t)\, M(1,t,n,\xi),$$

$$\|S_n\|_t \le B^*(t)\, M(2,t,n,\xi)$$

являются наилучшими среди всех неравенств (101) и (102) в случаях $t\ge 2$ и $t\ge 4$ соответственно. Однако, неравенства (101) и (102) могут быть лучше, чем неравенства Розенталя в случае $1<t<2$ в теореме 1.14 и $3\le t<4$ в теореме 1.15. Это легко показывается путем выбора с.в. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ с распределениями

$$P(\xi_k = n) = 1/n\ ,\quad P(\xi_k = 0) = 1 - 1/n$$

(теорема 1.14) и с распределениями

$$P(\xi_k = n) = P(\xi_k = -n) = 1/2n\ ,\quad P(\xi_k = 0) = 1 - 1/n$$

(теорема 1.15).

ГЛАВА 2. МОМЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ СТАТИСТИК.

2.1. Известные моментные неравенства для симметрических статистик.

Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независимые с.в. с $E\xi_i=0$, $E|\xi_i|^t<\infty$, $i=1,\dots,n$, $1\le t<\infty$. Из неравенства Марцинкевича-Зигмунда, используя элементарное соотношение

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i|^t \le n^{t-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i|^t,$$

легко получить, что

$$E|\sum_{i=1}^{n}\xi_i|^t \le D_2(t)\, n^{t/2-1}\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^t. \tag{2.1}$$

В ряде работ содержатся обобщения неравенства (2.1) на случай симметрических статистик (см. [6], [20], [48]). Так, из теоремы 2.1.4 работы [6] следует, в частности, что для всех симметрических статистик второго порядка

$$T_n = \sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y(X_{i_1},X_{i_2})$$

от независимых одинаково распределенных с.в. $X_1,\dots,X_n$, ядро которых удовлетворяет условиям

$$E(Y(X_1,X_2)/X_1)=0,\quad E|Y(X_1,X_2)|^t<\infty,\ t>2, \tag{2.2}$$

имеет место неравенство

$$E|T_n|^t \le B(t)\, n^t E|Y(X_1,X_2)|^t.$$

Хотя это неравенство довольно часто используется, оно, равно как и неравенство (2.1), является неточным в том смысле, что не существует универсальной положительной константы $A(t)$ такой, что

$$E|T_n|^t \ge A(t)\, n^t E|Y(X_1,X_2)|^t$$

для любой симметрической статистики T_n с ядром, удовлетворяющим условиям (2.2).

Впервые двусторонние оценки одинакового порядка для симметрических статистик

$$T_n = \sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y(X_{i_1},X_{i_2}),$$

являющиеся аналогами неравенств Розенталя, Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда, были получены в работах Ш. Шарахметова [16] и [17].

5. Аналоги неравенств Розенталя для симметрических статистик второго порядка от независимых одинаково распределенных с.в. [16], [17]. Если $t \geq 2$, $X_1,\ldots,X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в., $Y: \mathscr{E}^2 \to \mathbb{R}$ - симметрическая функция, удовлетворяющая условиям (2.2), то имеют место неравенства

$$A(t)\max(n^2E|Y(X_1,X_2)|^t,\ n^{t/2+1}E(E(Y^2(X_1,X_2)/X_1))^{t/2}, n^t(EY^2(X_1,X_2))^{t/2}) \leq$$
$$E|T_n|^t \leq B(t)\max(n^2E|Y(X_1,X_2)|^t,\ n^{t/2+1}E(E(Y^2(X_1,X_2)/X_1))^{t/2}, n^t(EY^2(X_1,X_2))^{t/2}) .$$

6. Аналоги неравенств Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда для симметрических статистик второго порядка от независимых одинаково распределенных с.в. [16], [17]. Если $t \geq 2$, $X_1,\ldots,X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в., $Y: \mathscr{E}^2 \to \mathbb{R}$ - симметрическая функция, удовлетворяющая условиям (2.2), то имеют место неравенства

$$A(t)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} Y^2(X_{i_1},X_{i_2})\Big)^{t/2} \leq E|T_n|^t \leq B(t)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} Y(X_{i_1},X_{i_2})\Big)^{t/2} .$$

Касательно моментных неравенств для симметрических статистик второго порядка от независимых одинаково распределенных с.в. следует отметить также работы А. Л. Алешкявичене [1], [18], которая получила оценку

$$E|T_n|^k \leq \sum_{r=0}^{k-2} n^{k-r}(2k)^{k+r}(E|Y(X_1,X_2)|^{r+2})^{3/(r+2)}(E|Y(X_1,X_2)|^3)^{(k-r-2)/3}, \quad k=1,2,\ldots$$

(см. лемму 2 в [1], лемму 3 в [18] и их доказательство).

Главная цель настоящей главы - доказать аналоги неравенств Розенталя, Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда для симметрических статистик произвольного порядка без предположения об одинаковой распределенности с.в. $X_1,\ldots,X_n$, симметрических статистик, ядро которых зависит от индексов суммирования, а также для многовыборочных статистик. Как будет видно из доказательства теорем, такие обобщения требуют привлечения ряда новых идей, отличных от тех, которые использовались в работах [16], [17].

2.2. Моментные неравенства для симметрических статистик от независимых одинаково распределенных случайных величин.

Настоящий параграф содержит аналоги неравенств Розенталя, Хинчина и Марцинкевича-Зигмунда для симметрических статистик от независимых одинаково распределенных случайных величин. Приведенные здесь теоремы следуют из более общих результатов параграфа 2.4.

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в., принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{E}, A)$, $1 \le m \le n$, $t \ge 1$.

Введем в расмотрение класс $F_1(t,m)$ функций $Y\colon \mathcal{E}^m \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$Y(X_1,X_2,\ldots,X_m) = Y(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},\ldots,X_{\pi(m)}) \quad \text{(п.н.)}$$

для всех перестановок π множества $\{1,2,\ldots,m\}$,

$$E\,|\,Y(X_1,X_2,\ldots,X_m)\,|^t < \infty .$$

Через $G_1(t,m)$ будем обозначать подмножество $F_1(t,m)$, состоящее из функций Y, для которых

$$E(Y(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_{m-1}) = 0 \quad \text{(п.н.)}.$$

Для $Y \in F_1(t,m)$ положим

$$T_n = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Y(X_{i_1},X_{i_2},\ldots,X_{i_m}) .$$

Теорема 2.1. Если $Y \in F_1(t,m)$ - неотрицательная функция, $t \ge 1$, то

$$A(t,m) \max_{k=0,m} n^{t(m-k)+k} E(E(Y(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^t \le ET_n^t \le$$

$$\le B(t,m) \max_{k=0,m} n^{t(m-k)+k} E(E(Y(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^t$$

(здесь и всюду далее $E(\cdot/X_1,\ldots,X_k) = E(\cdot)$ при $k=0$).

Теорема 2.2 Если $Y \in G_1(t,m)$, $t \ge 2$, то

$$A(t,m) \max_{k=0,m} n^{t/2(m-k)+k} E(E(Y^2(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^{t/2} \le E\,|\,T_n\,|^t \le$$

$$\le B(t,m) \max_{k=0,m} n^{t/2(m-k)+k} E(E(Y^2(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^{t/2} .$$

Теорема 2.3. Если $Y \in G_1(t,m)$, $t \ge 2$, то

$$A(t,m)\, E\Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Y^2(X_{i_1},X_{i_2},\ldots,X_{i_m}) \Big)^{t/2} \le E\,|\,T_n\,|^t \le$$

$$\leq B(t,m)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Y^2(Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_m) \Big)^{t/2} .$$

<u>Следствие 2.1.</u> Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые неотрицательные одинаково распределенные с.в. с $EX_1^{\,t}<\infty$, $t\geq 1$, то

$$A(t,m) \max_{k=0,m} n^{t(m-k)+k}(EX_1^{\,t})^k (EX_1)^{t(m-k)} \leq E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1\ldots Xi_m \Big)^t \leq$$

$$\leq B(t,m) \max_{k=0,m} n^{t(m-k)+k}(EX_1^{\,t})^k (EX_1)^{t(m-k)} .$$

<u>Следствие 2.2.</u> Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в. с $EX_1=0$, $E|X_1|^t<\infty$, $t\geq 2$, то

$$A(t,m) \max_{k=0,m} n^{t/2(m-k)+k}(E|X_1|^t)^k (EX_1^2)^{t/2(m-k)} \leq E\Big| \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1\ldots Xi_m \Big|^t \leq$$

$$\leq B(t,m) \max_{k=0,m} n^{t/2(m-k)+k}(E|X_1|^t)^k (EX_1^2)^{t/2(m-k)} .$$

<u>Следствие 2.3.</u> Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые одинаково распределенные с.в. с $EX_1=0$, $E|X_1|^t<\infty$, $t\geq 2$, то

$$A(t,m)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1^2\ldots Xi_m^2 \Big)^{t/2} \leq E\Big| \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1\ldots Xi_m \Big|^t \leq$$

$$\leq B(t,m)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1^2\ldots Xi_m^2 \Big)^{t/2} .$$

Замечание 2.1. Отметим, что, вообще говоря, каждый член, участвующий в выражении

$$\Phi_n = \max_{k=0,m} n^{t/2(m-k)+k} E(E(Y^2(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^{t/2},\ t>2 ,$$

(теорема 2.2) и, следовательно, в выражении

$$\Psi_n = \max_{k=0,m} n^{t(m-k)+k} E(E(Y(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^t,\ t>1 ,$$

(теорема 2.1) является существенным. Действительно, пусть $0\leq k\leq m$, $a=1/t\text{-}n^{-t/2}$, с.в. $X_1,\ldots,X_m$ имеют показательное распределение с параметром 1 ,

$$Y(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\pi} [\, \exp(a \sum_{i=1}^{k} x_{\pi(i)} - a \sum_{i=k+1}^{m} x_{\pi(i)}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} (-1)^l \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_l \le m} \prod_{s=1}^{l} (1/(1-a \cdot sgn(k+0,5-j_s))) \; exp(a \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j_1,\ldots,j_l}}^{k} x_{\pi(i)} - a \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \ne j_1,\ldots,j_l}}^{m} x_{\pi(i)}) \,] ,$$

где внешнее суммирование производится по всем перестановкам π множества $\{1,2,\ldots,m\}$. Нетрудно видеть, что $Y \in G(t)$. При $n \to \infty$ выражения

$$n^{t/2(m-l)+l} E(E(Y^2(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_l))^{t/2} , \; l=0,\ldots,k ,$$

имеют порядок роста $n^{tm/2+l}$, а выражения

$$n^{t/2(m-l)+l} E(E(Y^2(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_l))^{t/2} , \; l=k+1,\ldots,m ,$$

имеют порядок роста $n^{t/2(m+k)-(t/2-1)l}$. Следовательно, порядок Φ_n определяется членом $n^{t/2(m-k)+k} E(E(Y^2(X_1,X_2,\ldots,X_m)/X_1,\ldots,X_k))^{t/2}$, что доказывает его существенность.

2.3. Моментные неравенства для симметрических статистик второго порядка.

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ - независимые, не обязательно одинаково распределенные с.в., принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{E}, A)$, $t \ge 1$.

Пусть $F_2(t)$ - класс функций $Y i_1 i_2 : \mathcal{E}^2 \to \mathbb{R}$, $1 \le i_1 \le n$, $1 \le i_2 \le n$, $i_1 \ne i_2$, удовлетворяющих условиям

$$Y i_1 i_2 (X i_1, X i_2) = Y i_2 i_1 (X i_2, X i_1) \quad \text{(п.н.)} ,$$

$$E \,|\, Y i_1 i_2 (X i_1, X i_2) \,|^t < \infty$$

для всех $1 \le i_1 < i_2 \le n$.

Через $G_2(t)$ обозначим подмножество $F_2(t)$, состоящее из функций Y , для которых

$$E(Y i_1 i_2 (X i_1, X i_2)/X i_1) = 0 \quad \text{(п.н.)},$$

$$E(Y i_1 i_2 (X i_1, X i_2)/X i_2) = 0 \quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1 \le i_1 < i_2 \le n$.

Для $Y \in F_2(t)$ положим

$$V_n = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} Y i_1 i_2 (X i_1, X i_2) \; .$$

Хотя моментные неравенства для статистик вида V_n можно получить как следствия неравенств для статистик более широкого класса (см. следующий параграф), мы рассматриваем их отдельно от общего случая. Причина этого в том, что доказательство неравенств Хинчина и Розенталя для статистик второго порядка, приводимое в этом параграфе, отличается в нескольких местах от доказательства этих неравенств для статистик произвольного порядка и значительно проще его. Кроме того, на наш взгляд, статистики второго порядка являются хорошей моделью для иллюстрации методов, которые применимы и в общем случае.

Для краткости в дальнейшем будем писать

$$Y_{i_1 i_2} = Y_{i_1 i_2}(X_{i_1}, X_{i_2}) \ , \quad 1 \le i_1 < i_2 \le n \ ,$$

Кроме того, обозначим

$$Y_{i_2} = \sum_{i_1=1}^{i_2-1} Y_{i_1 i_2} \ , \quad i_2 = 2, \dots, n \ ,$$

$$Y_{i_1} = \sum_{i_2=i_1+1}^{n} Y_{i_1 i_2} \ , \quad i_1 = 1, \dots, n-1 \ .$$

Теорема 2.4. Если $Y_{i_1 i_2}: \mathscr{X}^2 \to \mathbb{R}$, $1 \le i_1 \le n$, $1 \le i_2 \le n$, $i_1 \ne i_2$, - неотрицательные функции, принадлежащие классу $F_2(t)$, $t \ge 1$, то

$$\max\Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} EY_{i_1 i_2}^t , \ \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_1})\Big)^t , \ \sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_2})\Big)^t , \ \Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} EY_{i_1 i_2}\Big)^t \Big) \le$$

$$\le EV_n^t \le B(t) \max\Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} EY_{i_1 i_2}^t , \ \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_1})\Big)^t ,$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_2})\Big)^t , \ \Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} EY_{i_1 i_2}\Big)^t \Big). \tag{2.3}$$

Теорема 2.5. Если $Y_{i_1 i_2}: \mathscr{X}^2 \to \mathbb{R}$, $1 \le i_1 \le n$, $1 \le i_2 \le n$, $i_1 \ne i_2$, - функции, принадлежащие классу $G_2(t)$, $t \ge 2$, то

$$A(t) \max\Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} E|Y_{i_1 i_2}|^t , \ \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1 i_2}^2/X_{i_1})\Big)^{t/2} ,$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1 i_2}^2/X_{i_2})\Big)^{t/2} , \ \Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} EY_{i_1 i_2}^2\Big)^{t/2} \Big) \le E|V_n|^t \le$$

$$\le B(t)\max\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E|Y_{i_1i_2}|^t,\ \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y^2_{i_1i_2}/X_{i_1})\Big)^{t/2},$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y^2_{i_1i_2}/X_{i_2})\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY^2_{i_1i_2}\Big)^{t/2}\Big). \qquad (2.4)$$

Теорема 2.6. Если $Y_{i_1i_2}\colon \mathcal{E}^2\to\mathbb{R}$, $1\le i_1\le n$, $1\le i_2\le n$, $i_1\ne i_2$, - функции, принадлежащие классу $G_2(t)$, $t\ge 2$, то

$$A(t)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y^2_{i_1i_2}\Big)^{t/2} \le E|V_n|^t \le B(t,m)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y^2_{i_1i_2}\Big)^{t/2}. \qquad (2.5)$$

Следствие 2.4. Если $X_1,\dots,X_n$ - независимые неотрицательные с.в. с $EX_k^t<\infty$, $k=1,\dots,n$, $t\ge 1$, то

$$\max\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EX^t_{i_1}EX^t_{i_2},\ \sum_{i_1=1}^{n-1} EX^t_{i_1}\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} EX_{i_2}\Big)^t,\ \sum_{i_2=2}^{n} EX^t_{i_2}\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} EX_{i_1}\Big)^t,\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EX_{i_1}EX_{i_2}\Big)^t\Big) \le$$

$$\le E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} X_{i_1}X_{i_2}\Big)^t \le B(t)\max\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EX^t_{i_1}EX^t_{i_2},\ \sum_{i_1=1}^{n-1} EX^t_{i_1}\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} EX_{i_2}\Big)^t,$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} EX^t_{i_2}\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} EX_{i_1}\Big)^t,\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EX_{i_1}EX_{i_2}\Big)^t\Big).$$

Следствие 2.5. Если $X_1,\dots,X_n$ - независимые с.в. с $EX_1=0$, $E|X_1|^t<\infty$, $t\ge 2$, то

$$A(t)\max\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E|X_{i_1}|^t E|X_{i_2}|^t,\ \sum_{i_1=1}^{n-1} E|X_{i_1}|^t\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} EX^2_{i_2}\Big)^{t/2},$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} E|X_{i_2}|^t\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} EX^2_{i_1}\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EX^2_{i_1}EX^2_{i_2}\Big)^{t/2}\Big) \le E\Big|\sum_{1\le i_1<i_2\le n} X_{i_1}X_{i_2}\Big|^t \le$$

$$\le B(t)\max\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E|X_{i_1}|^t E|X_{i_2}|^t,\ \sum_{i_1=1}^{n-1} E|X_{i_1}|^t\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} EX^2_{i_2}\Big)^{t/2},$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} E|X_{i_2}|^t\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} EX^2_{i_1}\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EX_{i_1}EX_{i_2}\Big)^{t/2}\Big).$$

Следствие 2.6. Если $X_1,\dots,X_n$ - независимые с.в. с $EX_1=0$, $E|X_1|^t<\infty$, $t\ge 2$, то

$$A(t)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} X_{i_1}^2 X_{i_2}^2 \Big)^{t/2} \le E\Big| \sum_{1\le i_1<i_2\le n} X_{i_1} X_{i_2} \Big|^t \le B(t)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} X_{i_1}^2 X_{i_2}^2 \Big)^{t/2} .$$

Для доказательства теорем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1. [30, теорема 5.1]. Пусть $\mathcal{F}_0=(\Omega,\varnothing)\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\ldots\subseteq\mathcal{F}_n$ - возрастающая последовательность σ-алгебр на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X_k, $k=1,\ldots,n$ - последовательность неотрицательных $\mathcal{F}_k$-измеримых случайных величин таких, что $EX_k^t<\infty$, $1\le t<\infty$. Тогда

$$E\Big(\sum_{k=1}^n X_k \Big)^t \le B(t) \max\Big(\sum_{k=1}^n EX_k^t ,\ E\Big(\sum_{k=1}^n E(X_k/\mathcal{F}_{k-1}) \Big)^t \Big) .$$

Лемма 2.2. [5, теорема 2.1.5]. Пусть $(X_k,\mathcal{F}_k)$ - мартингал-разность, такая, что $E|X_1|^t<\infty$, $2\le t<\infty$. Тогда

$$A(t) \max\Big(\sum_{k=1}^n E|X_k|^t ,\ E\Big(\sum_{k=1}^n E(X_k^2/\mathcal{F}_{k-1}) \Big)^{t/2} \Big) \le E\Big| \sum_{k=1}^n X_k \Big|^t \le$$

$$\le B(t) \max\Big(\sum_{k=1}^n E|X_k|^t ,\ E\Big(\sum_{k=1}^n E(X_k^2/\mathcal{F}_{k-1}) \Big)^{t/2} \Big) .$$

Следующая лемма (с несколько другим доказательством) содержится в [17].

Лемма 2.3. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность неотрицательных с.в. со значениями в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{E}, A)$,

$$A_t = \sum_{n=1}^{\infty} EX_n^t < \infty ,$$

$$B_\gamma = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^\gamma \Big)^{1/\gamma} < \infty .$$

Тогда

$$A_s \le (A_t^{s-\gamma} B_\gamma^{\gamma(t-s)})^{1/(t-\gamma)} \tag{2.6}$$

для всех $1\le\gamma<s<t$,

$$A_t B_\gamma^s \le \max(A_{t+s}, B_\gamma^{t+s}) \tag{2.7}$$

для всех $1\le\gamma<t,\ s\ge 0$,

$$max(A_s, B_\gamma^s) \le (max(A_t, B_\gamma^t))^{s/t} \tag{2.8}$$

для всех $1 \le \gamma < s < t$.

Доказательство. Неравенство (2.6) следует из выпуклости функции $f(t) = \ln A_t$.

Используя (2.6), имеем, что

$$A_t B_\gamma^s \le (A_{t+s}^{t-\gamma} B_\gamma^{s(t+s)})^{1/(t+s-\gamma)} \le max(A_{t+s}, B_\gamma^{t+s}) ,$$

$$A_s \le (max(A_t, B_\gamma^t))^{(s-\gamma s/t)/(t-\gamma)} = (max(A_t, B_\gamma^t))^{s/t}$$

Тем самым соотношения (2.7) и (2.8) доказаны.

Пусть $1 \le m \le n$, $t \ge 1$, неотрицательные функции $Yi_1,\ldots,i_m: \mathscr{E}^m \to \mathbb{R}$, $1 \le i_l \le n$, $i_r \ne i_s$, $r \ne s$, $l,s,r,s = 1,\ldots,m$, удовлетворяют условиям

$$EY^t i_1,\ldots,i_m(Xi_1,\ldots,Xi_m) < \infty ,$$

$$Yi_1,\ldots,i_m(Xi_1,\ldots,Xi_m) = Yi_1,\ldots,i_m(Xi_{\pi(1)},\ldots,Xi_{\pi(m)}) \quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\ldots,m\}$. Для $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le m$, $1 \le j'_1 < \ldots < j'_l \le m$, $k,l = 0,\ldots,m$, обозначим

$$H(Y,t,j_1,\ldots,j_k) = \sum_{1 \le ij_1 < \ldots < ij_k \le n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s \ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n}} E(Yi_1,\ldots,i_m(Xi_1,\ldots,Xi_m)/X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k})\Big)^t.$$

При этом будем полагать

$$H(Y,t) = \Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} EYi_1,\ldots,i_m(Xi_1,\ldots,Xi_m) \Big)^t .$$

Из леммы 2.3 вытекает, что для всех неотрицательных функций Y , принадлежащих классу $F_2(2t)$ и всех $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le m$, $1 \le j'_1 < \ldots < j'_l \le m$, $k,l = 0,\ldots,m$, $t \ge 1$ имеют место неравенства:

$$H(Y,t,j_1,\ldots,j_k) H(Y,t,j'_1,\ldots,j'_l) \le max\, (H(Y,2t,j_1,\ldots,j_k),\ H(Y,2t,j'_1,\ldots,j'_l),\ H(Y,2t)). \tag{2.9}$$

Доказательство теоремы 2.4. В силу неотрицательности функций Y и неравенства Иенсена имеем, что

$$E\Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} Yi_1 i_2 \Big)^t \ge \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} EY^t i_1 i_2 ,$$

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y_{i_1 i_2}\Big)^t \ge \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} Y_{i_1 i_2}\Big)^t \ge \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_1})\Big)^t,$$

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y_{i_1 i_2}\Big)^t \ge \sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} Y_{i_1 i_2}\Big)^t \ge \sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_2})\Big)^t,$$

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} Y_{i_1 i_2}\Big)^t \ge \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY_{i_1 i_2}\Big)^t .$$

Левое неравенство (2.3) доказано.

Докажем правое неравенство (2.3). Очевидно, что с.в. Y_{i_2}, $i_2=2,\dots,n$, измеримы относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\dots,X_{i_2})$, с.в. $Y_{i_1 i_2}$, $i_1=1,\dots,i_2-1$, измеримы относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\dots,X_{i_1},X_{i_2})$, $i_2=2,\dots,n$. В силу леммы 2.1 имеют место неравенства

$$EV_n^t \le B(t)\max\Big(\sum_{i_2=2}^{n} EY_{i_2}^t,\ E\Big(\sum_{i_2=2}^{n} E(Y_{i_2}/X_1,\dots,X_{i_2-1})\Big)^t\Big), \tag{2.9}$$

$$EY_{i_2}^t \le B(t)\max\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} EY_{i_1 i_2}^t,\ E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_2})\Big)^t\Big). \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) получаем, что

$$EV_n^t \le B(t)\max\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY_{i_1 i_2},\ \sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_2})\Big)^t,\ E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_1})\Big)^t\Big). \tag{2.11}$$

В силу неравенства Розенталя для независимых неотрицательных с.в. (неравенство (1.1))

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_1})\Big)^t = E\Big(\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_1})\Big)^t \le$$

$$\le B(t)\max\Big(\sum_{i_1=1}^{n} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1 i_2}/X_{i_1})\Big)^t,\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY_{i_1 i_2}\Big)^t\Big). \tag{2.12}$$

Из (2.11), (2.12) получаем правое неравенство (2.3). Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 2.5.</u> Легко видеть, что при условиях теоремы с.в. Y_{i_2}, $i_2=2,\dots,n$, образуют мартингал-разность относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\dots,X_{i_2})$,

с.в. $Y_{i_1 i_2}$, $i_1=1,\dots,i_2-1$, образуют мартингал-разность относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\dots,X_{i_1},X_{i_2})$, $i_2=2,\dots,n$, с.в. Y_{i_1}, $i_1=1,\dots,n-1$, образуют обращенную мартингал-разность относительно σ-алгебр $\sigma(X_{i_1},\dots,X_n)$, с.в. $Y_{i_1 i_2}$, $i_2=i_1+1,\dots,n$, образуют мартингал-разность относительно σ-алгебр $\sigma(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_n)$, $i_1=1,\dots,n-1$.

В силу леммы 2.2

$$E|T_n|^t \ge A(t)\max\Big(\sum_{i_2=2}^{n} E|Y_{i_2}|^t,\ E\big(\sum_{i_2=2}^{n} E(Y_{i_2}^2/X_1,\dots,X_{i_2-1})\big)^{t/2}\Big), \tag{2.13}$$

$$E|T_n|^t \ge A(t)\max\Big(\sum_{i_1=1}^{n-1} E|Y_{i_1}|^t,\ E\big(\sum_{i_1=1}^{n-1} E(Y_{i_1}^2/X_{i_1+1},\dots,X_n)\big)^{t/2}\Big), \tag{2.14}$$

$$E|Y_{i_2}|^t \ge A(t)\max\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E|Y_{i_1 i_2}|^t,\ E\big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1 i_2}^2/X_{i_2})\big)^{t/2}\Big), \tag{2.15}$$

$$E|Y_{i_1}|^t \ge A(t)\max\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E|Y_{i_1 i_2}|^t,\ E\big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1 i_2}^2/X_{i_1})\big)^{t/2}\Big). \tag{2.16}$$

Легко проверить, что если функции $Y_{i_1 i_2}: \mathscr{E}^2 \to \mathbb{R}$, $1\le i_1\le n$, $1\le i_2\le n$, $i_1\ne i_2$, удовлетворяют условиям

$E(Y_{i_1 i_2}(X_{i_1},X_{i_2})/X_{i_1})=0$ (п.н.),

$E(Y_{i_1 i_2}(X_{i_1},X_{i_2})/X_{i_2})=0$ (п.н.)

для всех $1\le i_1<i_2\le n$, то с.в. $Y_{i_1 i_2}(X_{i_1},X_{i_2})$ обладают свойством ортогональности, то есть

$$EY_{i_1 i_2}(X_{i_1},X_{i_2})Y_{j_1 j_2}(X_{j_1},X_{j_2})=0 \tag{2.17}$$

при $(i_1,i_2)\ne(j_1,j_2)$. Из (2.17) и неравенства Иенсена следует, что

$$E\Big(\sum_{i_2=2}^{n} E(Y_{i_2}^2/X_1,\dots,X_{i_2-1})\Big)^{t/2} \ge \Big(\sum_{i_2=2}^{n} EY_{i_2}^2\Big)^{t/2} = \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY_{i_1 i_2}^2\Big)^{t/2}. \tag{2.18}$$

Из (2.13)-(2.16) и (2.18) получаем левое неравенство (2.4).

Докажем оставшуюся часть теоремы 2.5. Из уже применявшейся леммы 2.2 следует, что

$$E|T_n|^t \le B(t)\max\Big(\sum_{i_2=2}^{n} E|Y_{i_2}|^t,\ E\big(\sum_{i_2=2}^{n} E(Y_{i_2}^2/X_1,\dots,X_{i_2-1})\big)^{t/2}\Big),$$

$$E|Y_{i_2}|^t \le B(t)\, max(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E|Y_{i_1 i_2}|^t \;,\; E(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y^2_{i_1 i_2}/X_{i_2})\,)^{t/2}\,) \,,$$

так что

$$E|T_n|^t \le B(t)\, max(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E|Y_{i_1 i_2}|^t \;,\; \sum_{i_2=2}^{n} E(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y^2_{i_1 i_2}/X_{i_2})\,)^{t/2}\,) \,,$$

$$E(\sum_{i_2=2}^{n} E(Y^2_{i_2}/X_1,\ldots, X_{i_2-1})\,)^{t/2}\,) \,. \tag{2.19}$$

Имеем, что

$$E(\sum_{i_2=2}^{n} E(Y^2_{i_2}/X_1,\ldots, X_{i_2-1})\,)^{t/2}\,) = E\,(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E(Y^2_{i_1 i_2}/X_{i_1}) \,+$$

$$+\; 2 \sum_{i_2=3}^{n} \sum_{1\le k<l\le i_2-1} E(Y_{k i_2} Y_{l i_2}/X_k, X_l)\,)^{t/2} \le 2^{t/2-1} E\,(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E(Y^2_{i_1 i_2}/X_{i_1})\,)^{t/2} \,+$$

$$+\; 2^{t/2} E| \sum_{1\le k<l\le n-1} \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y_{k i_2} Y_{l i_2}/X_k, X_l)\,|^{t/2} \,. \tag{2.20}$$

В силу неравенства (1.1) для всех $t\ge 2$

$$E(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} E(Y^2_{i_1 i_2}/X_{i_1})\,)^{t/2} \le B(t)\, max(\sum_{i_1=1}^{n-1} E\,(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y^2_{i_1 i_2}/X_{i_1})\,)^{t/2} \,,$$

$$(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY^2_{i_1 i_2})^{t/2}\,) \,. \tag{2.21}$$

Нетрудно проверить, что функции $Z_{kl}\colon \mathscr{E}^2 \to \mathbb{R}$, $1\le k\le n$, $1\le l\le n$, $k\ne l$, определяемые условиями

$$Z_{kl}(x,y) = \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y_{k i_2} Y_{l i_2}/X_k=x, X_l=y) \,,$$

принадлежат классу $G_2(t/2)$.

В силу ортогональности функций Z (соотношение (2.17)) и неравенства Иенсена при $2\le t<4$ имеем, что

$$E\,| \sum_{1\le k<l\le n-1} \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y_{k i_2} Y_{l i_2}/X_k, X_l)\,|^{t/2} \le$$

$$\leq \Big(\sum_{1\leq k<l\leq n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l)\Big)^2\Big)^{t/4} . \tag{2.22}$$

Покажем, что

$$\Big(\sum_{1\leq k<l\leq n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l)\Big)^2\Big)^{t/4} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} EY^2_{i_1 i_2}\Big)^{t/2} . \tag{2.23}$$

при всех $2\leq t<4$. Действительно, по неравенству Шварца

$$| E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) | \leq (E(Y^2ki_2/X_k))^{1/2} (E(Y^2li_2/X_l))^{1/2} . \tag{2.24}$$

Следовательно,

$$\Big(\sum_{1\leq k<l\leq n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l)\Big)^2\Big)^{t/4} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{1\leq k<l\leq n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} (E(Y^2ki_2/X_k))^{1/2}(E(Y^2li_2/X_l))^{1/2}\Big)^2\Big)^{t/4} . \tag{2.25}$$

Из (2.25) и неравенства Коши

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) , \tag{2.26}$$

где $a_i, b_i \geq 0$, получаем, что

$$\Big(\sum_{1\leq k<l\leq n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l)\Big)^2\Big)^{t/4} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{1\leq k<l\leq n-1} \Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} EY^2ki_2 \Big)\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} EY^2li_2 \Big)\Big)^{t/4} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} EY^2_{i_1 i_2}\Big)^{t/2} .$$

Из (2.22), (2.23) следует, что

$$E \Big| \sum_{1\leq k<l\leq n-1} \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) \Big|^{t/2} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} EY^2_{i_1 i_2}\Big)^{t/2} \tag{2.27}$$

для всех $2 \le t < 4$. Из (2.19)-(2.21), (2.27) получаем, что правое неравенство (2.4) справедливо при $2 \le t < 4$.

Для $2 \le t < \infty$ обозначим $\alpha(t) = [t/2]$. По только что доказанному утверждению правая часть неравенства (2.4) верна при всех t , для которых $\alpha(t) = 1$. Пусть t таково, что $\alpha(t) = l \ge 2$ и предположим, что правая часть (2.4) уже доказана при всех t таких, что $\alpha(t) = l-1$.

В силу индуктивного предположения

$$E \left| \sum_{1 \le k < l \le n-1} \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) \right|^{t/2} \le$$

$$\le B(t/2) \max \Big(\sum_{1 \le k < l \le n-1} E \Big| \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) \Big|^{t/2} ,$$

$$\sum_{l=2}^{n-1} E\Big(\sum_{k=1}^{l-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) \Big)^2 /X_l \Big)^{t/4} ,$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} E\Big(\sum_{l=k+1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) \Big)^2 /X_k \Big)^{t/4} ,$$

$$\Big(\sum_{1 \le k < l \le n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) \Big)^2 \Big)^{t/2} \Big) . \qquad (2.28)$$

Из соотношений (2.9), (2.25), (2.26) следует, что

$$\sum_{1 \le k < l \le n-1} E \Big| \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2Yli_2/X_k,X_l) \Big|^{t/2} \le$$

$$\le \sum_{1 \le k < l \le n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} (E(Yki_2^2/X_k))^{1/2}(E(Yli_2^2/X_l))^{1/2} \Big)^{t/2} \le$$

$$\le \sum_{1 \le k < l \le n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yki_2^2/X_k) \Big)^{t/4} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Yli_2^2/X_l) \Big)^{t/4} \le$$

$$\le \Big(\sum_{i_1=1}^{n} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Yi_1i_2^2/Xi_1) \Big)^{t/4} \Big)^2 \le$$

$$\le \max \Big(\sum_{i_1=1}^{n} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Yi_1i_2^2/Xi_1) \Big)^{t/2} , \Big(\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} EYi_1i_2^2 \Big)^{t/2} \Big) . \qquad (2.29)$$

Далее,

$$\sum_{l=2}^{n-1} E\Big(\sum_{k=1}^{l-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y_{ki_2}Y_{li_2}/X_k,X_l)\Big)^2/X_l\Big)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{l=2}^{n-1} E\Big(\sum_{k=1}^{l-1} E\Big(\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} \big(E(Y^2_{ki_2}/X_k)\big)^{1/2}\big(E(Y^2_{li_2}/X_l)\big)^{1/2}\Big)\Big)^2/X_l\Big)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{l=2}^{n-1} E\Big(\sum_{k=1}^{l-1} \Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} EY^2_{ki_2}\Big) E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y^2_{li_2}/X_l)\Big)\Big)^{t/4} =$$

$$= \sum_{l=2}^{n-1} E\Big(\sum_{k=1}^{l-1} \sum_{i_2=l+1}^{n} EY^2_{ki_2}\Big)^{t/4} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y^2_{li_2}/X_l)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY^2_{i_1i_2}\Big)^{t/4} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y^2_{i_1i_2}/X_{i_1})\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \max\Big(\sum_{i_1=1}^{n} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y^2_{i_1i_2}/X_{i_1})\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY^2_{i_1i_2}\Big)^{t/2}\Big). \tag{2.30}$$

Аналогично,

$$\sum_{k=1}^{n-1} E\Big(\sum_{l=k+1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y_{ki_2}Y_{li_2}/X_k,X_l)\Big)^2/X_k\Big)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} E\Big(\sum_{l=k+1}^{n-1} E\Big(\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} \big(E(Y^2_{ki_2}/X_k)\big)^{1/2}\big(E(Y^2_{li_2}/X_l)\big)^{1/2}\Big)\Big)^2/X_k\Big)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} E\Big(\sum_{l=k+1}^{n-1} \Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} EY^2_{ki_2}\Big) E\Big(\sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y^2_{li_2}/X_l)\Big)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} E\Big(\sum_{l=k+1}^{n-1} \sum_{i_2=l+1}^{n} EY^2_{ki_2}\Big)^{t/4} E\Big(\sum_{i_2=k+1}^{n} E(Y^2_{li_2}/X_l)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY^2_{i_1i_2}\Big)^{t/4} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y^2_{i_1i_2}/X_{i_1})\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \max\Big(\sum_{i_1=1}^{n} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y^2_{i_1i_2}/X_{i_1})\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} EY^2_{i_1i_2}\Big)^{t/2}\Big). \tag{2.31}$$

Из соотношений (2.28)-(2.31) получаем, что

$$E\Big| \sum_{1\le k<l\le n-1} \sum_{i_2=l+1}^{n} E(Y_{ki_2}Y_{li_2}/X_k,X_l)\Big|^{t/2} \le$$

$$\leq B(t/2)\max\Big(\sum_{i_1=1}^{n} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1i_2}^2/X_{i_1})\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} EY_{i_1i_2}^2\Big)^{t/2}\Big).\quad(2.32)$$

Из (2.19)-(2.21) и (2.32) следует, что правое неравенство (2.4) верно при выбранном нами t. По принципу индукции утверждение теоремы полностью доказано.

Доказательство теоремы 2.6. Из теоремы 2.4 следует, что

$$\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} E|Y_{i_1i_2}|^t,\ \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1i_2}^2/X_{i_1})\Big)^{t/2},$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1i_2}^2/X_{i_2})\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} EY_{i_1i_2}^2\Big)^{t/2}\Big)\leq E\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} Y_{i_1i_2}^2\Big)^{t/2}\leq$$

$$\leq B(t,m)\max\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} E|Y_{i_1i_2}|^t,\ \sum_{i_1=1}^{n-1} E\Big(\sum_{i_2=i_1+1}^{n} E(Y_{i_1i_2}^2/X_{i_1})\Big)^{t/2},$$

$$\sum_{i_2=2}^{n} E\Big(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} E(Y_{i_1i_2}^2/X_{i_2})\Big)^{t/2},\ \Big(\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} EY_{i_1i_2}^2\Big)^{t/2}\Big).\quad(2.33)$$

Из (2.4), (2.33) получаем соотношение (2.5). Теорема доказана.

2.4. Моментные неравенства для симметрических статистик с переменным ядром от независимых различно распределенных случайных величин.

Пусть, так же, как в предыдущем параграфе, $X_1,\ldots,X_n$ - независимые, не обязательно одинаково распределенные случайные величины (с.в.), принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{X}, A)$, $1\leq m\leq n$, $t\geq 1$.

Пусть $F_3(t,m)$ - класс функций $Y_{i_1,\ldots,i_m}: \mathcal{X}^m\to\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, удовлетворяющих условиям

$$E|Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})|^t<\infty,$$

$$Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})=Y_{i_{\pi(1)},\ldots,i_{\pi(m)}}(X_{i_{\pi(1)}},\ldots,X_{i_{\pi(m)}})\quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\ldots,m\}$.

Через $G_3(t,m)$ будем обозначать подмножество $F_3(t,m)$, состоящее из функций Y, для которых

$$E(Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})/X_{i_{\pi(1)}},\ldots,X_{i_{\pi(m-1)}})=0\quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\ldots,m\}$.

Определение 2.1. [19]. Говорят, что с.в. X условно симметрично распределена на σ-алгебре $\mathcal{F}$, если для любого $a\geq 0$ $P(X>a/\mathcal{F})=P(X<-a/\mathcal{F})$.

Пусть $G'_3(t,m)$ - подмножество $G_3(t,m)$, состоящее из функций Y , для которых с.в. $Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})$ условно симметрично распределены на σ-алгебре $\sigma(X_{i_{\pi(1)}},\dots,X_{i_{\pi(m-1)}})$ для всех $1\leq i_1<i_2<\dots<i_m\leq n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\dots,m\}$.

Для $Y\in F_3(t,m)$ положим

$$T_{n,m} = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_m\leq n} Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_m}) .$$

Для $1\leq i_1<i_2<\dots<i_m\leq n$ будем писать $Y(i_1,\dots,i_m)=Y_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.7. Если $Y_{i_1,\dots,i_m}: \mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\dots,m$, - неотрицательные функции, принадлежащие классу $F_3(t,m)$, $t\geq 1$, то

$$\max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq m} \sum_{1\leq i_{j_1}<\dots<i_{j_k}\leq n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\leq i_1<\dots<i_m\leq n}} E(Y(i_1,\dots,i_m)/X_{i_{j_1}},\dots,X_{i_{j_k}})\Big)^t \leq$$

$$\leq ET^t_{n,m} \leq$$

$$\leq B(t,m)\max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq m} \sum_{1\leq i_{j_1}<\dots<i_{j_k}\leq n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\leq i_1<\dots<i_m\leq n}} E(Y(i_1,\dots,i_m)/$$

$$X_{i_{j_1}},\dots,X_{i_{j_k}})\Big)^t. \tag{2.34}$$

Теорема 2.8. Если $Y_{i_1,\dots,i_m}: \mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\dots,m$, - функции, принадлежащие классу $G_3(t,m)$, $t\geq 2$, то

$$A(t,m)\max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq m} \sum_{1\leq i_{j_1}<\dots<i_{j_k}\leq n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\leq i_1<\dots<i_m\leq n}} E(Y^2(i_1,\dots,i_m)/X_{i_{j_1}},\dots,X_{i_{j_k}})\Big)^{t/2}\leq$$

$$\leq E|T_{n,m}|^t \leq$$

$$\le B(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m} \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_k\le n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_m\le n}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k})\Big)^{t/2}. \qquad (2.35)$$

Теорема 2.9. Если $Yi_1,\ldots,i_m$: $\mathcal{E}^m \to \mathbb{R}$, $1\le i_k\le n$, $i_r\ne i_s$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, - функции, принадлежащие классу $G_3(t,m)$, $t\ge 1$, то

$$A(t,m)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2} \le E|T_{n,m}|^t \qquad (2.36)$$

при $t\ge 2$,

$$E|T_{n,m}|^t \le B(t,m)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2} \qquad (2.37)$$

при $t\ge 1$. Если функции $Yi_1,\ldots,i_m$: $\mathcal{E}^m \to \mathbb{R}$, $1\le i_k\le n$, $i_r\ne i_s$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, - функции, принадлежащие классу $G'_3(t,m)$, $t>0$, то

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2} \le E|T_{n,m}|^t \qquad (2.38)$$

при $t\ge 2$,

$$E|T_{n,m}|^t \le B(t,m)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2} \qquad (2.39)$$

при $t>0$, причем $B(t,m)=1$ для $0<t\le 1$.

Замечание 2.2. Из теоремы 2.7 очевидным образом следует, что аналоги неравенств Розенталя (2.35) и Марцинкевича-Зигмунда (2.36), (2.37) *эквивалентны* с точностью до постоянной, то есть, если для симметрической статистики $T_{n,m}$ справедливо одно из этих неравенств, то имеет место и другое (вообще говоря, с другой константой).

Следствие 2.7. Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые неотрицательные с.в. с $EX_k^t<\infty$, $k=1,\ldots,n$, $t\ge 1$, то

$$\max_{k=0,m} \max_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m} \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_k\le n} \prod_{l=1}^{k} EX_{ij_l}^{t} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_m\le n}} \prod_{\substack{l\ne j_1,\ldots,j_k\\ l=1,\ldots,m}} EX_{i_l} \Big)^t \le E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} X_{i_1}\ldots X_{i_m}\Big)^t \le$$

$$\le B(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m} \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_k\le n} \prod_{l=1}^{k} EX_{ij_l}^{t} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_m\le n}} \prod_{\substack{l\ne j_1,\ldots,j_k\\ l=1,\ldots,m}} EX_{i_l} \Big)^t .$$

Следствие 2.8. Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые с.в. с $EX_k=0$, $E|X_k|^t<\infty$, $k=1,\ldots,n$, $t\ge 2$, то

$$A(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m} \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_k\le n} \prod_{l=1}^{k} E|X_{ij_l}|^{t} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_m\le n}} \prod_{\substack{l\ne j_1,\ldots,j_k\\ l=1,\ldots,m}} EX_{i_l}^2 \Big)^{t/2} \le E\Big| \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} X_{i_1}\ldots X_{i_m}\Big|^t \le$$

$$\le B(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m} \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_k\le n} \prod_{l=1}^{k} E|X_{ij_l}|^{t} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_m\le n}} \prod_{\substack{l\ne j_1,\ldots,j_k\\ l=1,\ldots,m}} EX_{i_l}^2 \Big)^{t/2} .$$

Следствие 2.9. Если $X_1,\ldots,X_n$ - независимые с.в. с $EX_k=0$, $E|X_k|^t<\infty$, $k=1,\ldots,n$, $t\ge 2$, то

$$A(t,m)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} X_{i_1}^2\ldots X_{i_m}^2\Big)^{t/2} \le E\Big| \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} X_{i_1}\ldots X_{i_m}\Big|^t \le$$

$$\le B(t,m)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} X_{i_1}^2\ldots X_{i_m}^2\Big)^{t/2} .$$

Сформулируем две леммы, которые понадобятся для доказательства теорем.

Лемма 2.4. [3]. Пусть $\{X_n\}$ - последовательность симметрично распределенных независимых с.в. Тогда эти величины условно независимы относительно σ-алгебры, порожденной последовательностью $\{|X_n|\}$.

Лемма 2.5. Пусть с.в. $X_1,\dots,X_n$ удовлетворяют условиям $E(X_kX_l/|X_k|,|X_l|)=0$ при $k,l=1,\dots,n$, $k\neq l$. Если $E|X_k|^t<\infty$, $k=1,\dots,n$, $t\geq 2$, то

$$E(\sum_{i=1}^n X_i^2)^{t/2} \leq E|\sum_{i=1}^n X_i|^t .$$

Если $E|X_k|^t<\infty$, $k=1,\dots,n$, $0<t<2$, то

$$E|\sum_{i=1}^n X_i|^t \leq E(\sum_{i=1}^n X_i^2)^{t/2} .$$

Доказательство. Пусть $t\geq 2$. В силу неравенства Иенсена

$$E|\sum_{i=1}^n X_i|^t = E(E(|\sum_{i=1}^n X_i|^t/|X_1|,\dots,|X_n|)) \geq E(E((\sum_{i=1}^n X_i)^2/|X_1|,\dots,|X_n|))^{t/2} =$$

$$= E(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} E(X_kX_l/|X_k|,|X_l|))^{t/2} = E(\sum_{i=1}^n X_i^2)^{t/2} . \tag{2.40}$$

При $0<t<2$ необходимо лишь изменить знак неравенства в (2.40) на противоположный.

Доказательство теоремы 2.7. Для $1\leq j_1<\dots<j_k\leq m$, $1\leq i j_1<\dots<i j_k\leq n$, $k=1,\dots,m-1$, обозначим

$$Y(ij_1,\dots,ij_k) = \sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\leq i_1<\dots<i_m\leq n}} Y(i_1,\dots,i_m)$$

Используя неотрицательность функций Y и неравенство Иенсена, имеем, что

$$ET^t_{n,m} \geq \sum_{1\leq ij_1<\dots<ij_k\leq n} E\,Y^t(ij_1,\dots,ij_k) \geq$$

$$\geq \sum_{1\leq ij_1<\dots<ij_k\leq n} E\,(E(Y(ij_1,\dots,ij_k)/X_{ij_1},\dots,X_{ij_k}))^t$$

для всех $1\leq j_1<\dots<j_k\leq m$, $k=0,\dots,m$. Тем самым

$$ET^{t}_{n,m} \geq \max_{k=0,m} \max_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} \sum_{1\leq ij_1<\ldots<ij_k\leq n} E\,(E(Y(ij_1,\ldots,ij_k)/X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k}))^t$$

Левое неравенство (2.34) доказано.

Очевидно, что с.в. $Y(i_m)$, $i_m=m,\ldots,n$ измеримы относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\ldots,Xi_m)$, с.в. $Y(i_k,\ldots,i_m)$, $i_k=k,\ldots,i_{k+1}-1$ измеримы относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\ldots,Xi_k,Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)$, $k+1\leq i_{k+1}<\ldots<i_m\leq n$, $k=1,\ldots,m-1$.

Применяя лемму 2.1, получаем, что

$$ET^{t}_{n,m} \leq B(t)\max\Big(\sum_{i_m=m}^{n} EYi^{t}_{m} \; , \; E\Big(\sum_{i_m=m}^{n} E(Yi_m/X_1,\ldots,Xi_m\text{-}1)\Big)^t \Big), \tag{2.41}$$

$$EY^t(i_k,\ldots,i_m) \leq B(t)\max\Big(\sum_{i_{k-1}=k-1}^{i_k-1} EY(i_{k-1},\ldots,i_m),$$

$$E\Big(\sum_{i_{k-1}=k-1}^{i_k-1} E(Y(i_{k-1},\ldots,i_m)/X_1,\ldots,Xi_{k-1}\text{-}1,Xi_k,\ldots,Xi_m)\Big)^t \Big), \tag{2.42}$$

для всех $k\leq i_k<\ldots<i_m\leq n$, $k=2,\ldots,m$.

Из (2.41) и (2.42) вытекает, что

$$ET^{t}_{n,m} \leq B(t,m)\max_{k=1,m-1} \Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} EY^t(i_1,i_2,\ldots,i_m)\,,\; E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} E(Y(i_1,i_2,\ldots,i_m)/$$

$$Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{m-1})\Big)^t , \quad \sum_{k+1\leq i_{k+1}<\ldots<i_m\leq m} E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq i_{k+1}-1} E(Y(i_1,i_2,\ldots,i_m)/$$

$$Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{k-1},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^t \Big). \tag{2.43}$$

Пусть $m\geq 2$ и предположим, что для всех статистик вида

$$T_{n,l} = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_l\leq n} Yi_1,\ldots,i_l(Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_l) \quad , \quad 1\leq l\leq m-1 ,$$

где $Yi_1,\ldots,i_l : \mathscr{E}^{\,l}\rightarrow\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,l$ - неотрицательные функции, удовлетворяющие условиям

$$E\,|\,Yi_1,\ldots,i_l\,(Xi_1,\ldots,Xi_l)\,|^{\,t}<\infty\,,$$

$$Yi_1,\ldots,i_l\,(Xi_1,\ldots,Xi_l)=Yi_1,\ldots,i_l\,(Xi_{\pi(1)},\ldots,Xi_{\pi(l)}) \quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_l \le n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\ldots,l\}$, оценка

$$ET^t_{n,l} \le B(t,l) \max_{s=0,l} \max_{1 \le j_1 < \ldots < j_s \le l} \sum_{1 \le ij_1 < \ldots < ij_s \le n} E\,(E(Y(ij_1,\ldots,ij_s)/X_{ij_1},\ldots,X_{ij_s}))^t$$

уже доказана. Тогда имеем, что

$$E(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} E(Y(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{m-1}))^t =$$

$$= E(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{m-1} \le n} \sum_{i_m = i_{m-1}+1}^{n} E(Y(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{m-1}))^t \le$$

$$\le B(t,m-1) \max_{s=0,m-1} \max_{1 \le j_1 < \ldots < j_s \le m-1} \sum_{1 \le ij_1 < \ldots < ij_s \le n} E\,(E(Y(ij_1,\ldots,ij_s)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_s}))^t\,. \tag{2.44}$$

Далее,

$$E\,(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le i_{k+1}-1} E(Y(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{k-1},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\ )^t =$$

$$= E\,(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{k-1} \le i_{k+1}-1} \sum_{i_k = i_{k-1}+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{k-1},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\ )^t \le$$

$$\le B(t,k-1) \max_{s=0,k-1} \max_{1 \le j_1 < \ldots < j_s \le k-1} \sum_{1 \le ij_1 < \ldots < ij_s \le i_{k+1}-1} E\,(E(Y(ij_1,\ldots,ij_s)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_s},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m))^t\,. \tag{2.45}$$

для всех $k+1 \le i_{k+1} < \ldots < i_m \le n$, $k=1,\ldots,m-1$.

Подставляя оценки (2.44), (2.45) в (2.43), получаем, что

$$ET^t_{n,m} \le B(t,m) \max_{k=0,m} \max_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le m} \sum_{1 \le ij_1 < \ldots < ij_k \le n} E\,(E(Y(ij_1,\ldots,ij_k)/X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k}))^t\,.$$

Таким образом, правое неравенство (2.34) верно для симметрической статистики $T_{n,m}$ порядка m. Учитывая, что при $m=1$ оценка (2.34) справедлива (неравенство 1.1), по принципу индукции теорема полностью доказана.

<u>Доказательство теоремы 2.8 и 2.9</u> Докажем сначала соотношения (2.36), (2.38) для $t\geq 2$, (2.37) для $1\leq t<2$, (2.39) для $0<t<2$. Пусть $Y_{i_1,\ldots,i_m}: \mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, - функции, принадлежащие классу $G_4(t,m)$, $t>0$. Для всех $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n$, $1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m\leq n$, $(i_1,i_2,\ldots,i_m)\neq(j_1,j_2,\ldots,j_m)$ таких, что $i_{\alpha_1}=i_{\beta_1},\ldots,i_{\alpha_k}=i_{\beta_k}$, $1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_k\leq m$, $1\leq\beta_1<\ldots<\beta_k\leq m$, имеем, что

$$E(Y(i_1,\ldots,i_m)Y(j_1,\ldots,j_m)/|\,Y(i_1,\ldots,i_m)\,|,\,|\,Y(j_1,\ldots,j_m)\,|\,)=$$

$$=E(Y(i_1,\ldots,i_m)Y(j_1,\ldots,j_m)/X_s,\ s\neq i_{\alpha_1},\ldots,i_{\alpha_k},\ s=1,\ldots,m,\ |\,Y(i_1,\ldots,i_m)\,|,\,|\,Y(j_1,\ldots,j_m)\,|\,).$$

Поскольку с.в. $Y(i_1,\ldots,i_m)$, $Y(j_1,\ldots,j_m)$ условно независимы и условно симметрично распределены на σ-алгебре $\sigma(X_s,\ s\neq i_{\alpha_1},\ldots,i_{\alpha_k},\ s=1,\ldots,m)$, то в силу леммы 2.4

$$E(Y(i_1,\ldots,i_m)Y(j_1,\ldots,j_m)/X_s,\ s\neq i_{\alpha_1},\ldots,i_{\alpha_k},\ s=1,\ldots,m,\ |\,Y(i_1,\ldots,i_m)\,|,\,|\,Y(j_1,\ldots,j_m)\,|\,)=$$

$$=E(Y(i_1,\ldots,i_m)/X_s,\ s\neq i_{\alpha_1},\ldots,i_{\alpha_k},\ s=1,\ldots,m,\ |\,Y(i_1,\ldots,i_m)\,|\,)\cdot$$

$$\cdot E(Y(j_1,\ldots,j_m)/X_s,\ s\neq i_{\alpha_1},\ldots,i_{\alpha_k},\ s=1,\ldots,m,\ |\,Y(j_1,\ldots,j_m)\,|\,)=0.$$

В силу леммы 2.5

$$E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2}\leq E\,|\,T_{n,m}\,|^t$$

при $t\geq 2$ и

$$E\,|\,T_{n,m}\,|^t\geq E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Y^2(i_1,\ldots,i_m)\Big)^{t/2}$$

при $0<t<2$. Тем самым соотношения (2.38) для $t\geq 2$ и (2.39) для $0<t<2$ доказаны.

В случае класса $G_3(t,m)$ применим метод симметризации. Пусть $Y_{i_1,\ldots,i_m}: \mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\leq i_k\leq n$, $i_r\neq i_s$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, - функции, принадлежащие классу $G_3(t,m)$, $t\geq 1$, $X'_1,\ldots,X'_n$ - с.в., не зависящие от $X_1,\ldots,X_n$, такие, что с.в. X'_k имеет одинаковое распределение со с.в. X_k, $k=1,\ldots,n$. Положим $Z_{i_1,\ldots,i_m}=Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})-Y_{i_1,\ldots,i_m}(X'_{i_1},\ldots,X'_{i_m})$. Для всех $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n$,

$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n$, $(i_1, i_2, \ldots, i_m) \ne (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, таких, что $i\alpha_1 = i\beta_1, \ldots, i\alpha_k = i\beta_k$, $1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \le m$, $1 \le \beta_1 < \ldots < \beta_k \le m$, имеем, что

$$E(Zi_{1,\ldots,i_m} Zj_{1,\ldots,j_m} / |Zi_{1,\ldots,i_m}|, |Zj_{1,\ldots,j_m}|) =$$

$$= E(Zi_{1,\ldots,i_m} Zj_{1,\ldots,j_m} / X_s,\ s \ne i\alpha_1, \ldots, i\alpha_k,\ s = 1, \ldots, m,\ |Zi_{1,\ldots,i_m}|,\ |Zj_{1,\ldots,j_m}|) .$$

С.в. $Zi_{1,\ldots,i_m}$, $Zj_{1,\ldots,j_m}$ условно независимы и условно симметрично распределены на σ-алгебре $\sigma(X_s,\ s \ne i\alpha_1, \ldots, i\alpha_k,\ s = 1, \ldots, m)$. Следовательно, в силу леммы 2.4

$$E(Zi_{1,\ldots,i_m} Zj_{1,\ldots,j_m} / X_s,\ s \ne i\alpha_1, \ldots, i\alpha_k,\ s = 1, \ldots, m,\ |Zi_{1,\ldots,i_m}|, |Zj_{1,\ldots,j_m}|) =$$

$$= E(Zi_{1,\ldots,i_m} / X_s,\ s \ne i\alpha_1, \ldots, i\alpha_k,\ s = 1, \ldots, m,\ |Zi_{1,\ldots,i_m}|) \cdot$$

$$\cdot E(Zj_{1,\ldots,j_m} / X_s,\ s \ne i\alpha_1, \ldots, i\alpha_k,\ s = 1, \ldots, m, |Zj_{1,\ldots,j_m}|) = 0 .$$

Применяя лемму 2.5, получаем, что

$$E\Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Zi^2_{1,\ldots,i_m} \Big)^{t/2} \le E\Big| \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Zi_{1,\ldots,i_m} \Big|^t \qquad (2.46)$$

при $t \ge 2$ и

$$E\Big| \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Zi_{1,\ldots,i_m} \Big|^t \le E\Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Zi^2_{1,\ldots,i_m} \Big)^{t/2} \qquad (2.47)$$

при $0 < t < 2$. Легко видеть, что

$$E|T_n|^t \le E\Big| \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Zi_{1,\ldots,i_m} \Big|^t \le 2^t E|T_n|^t , \qquad (2.48)$$

при $t \ge 1$,

$$E\Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Zi^2_{1,\ldots,i_m} \Big)^{t/2} \le 2^{t/2} E\Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Yi^2_{1,\ldots,i_m}(Xi_1, Xi_2, \ldots, Xi_m) +$$

$$+ Yi^2_{1,\ldots,i_m}(X'i_1, X'i_2, \ldots, X'i_m) \Big)^{t/2} \le 2^{t/2+1} E\Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Yi^2_{1,\ldots,i_m}(Xi_1, Xi_2, \ldots, Xi_m) \Big)^{t/2} \qquad (2.49)$$

при $1 \le t < 2$. Кроме того, из неравенства Иенсена следует, что при $t \ge 2$

$$E\Big(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} Zi^2_{1,\ldots,i_m} \Big)^{t/2} \ge \max_{k=0,m} \ \max_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le m} \ \sum_{1 \le ij_1 < \ldots < ij_k \le n} E\Big($$

$$\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} Z^2_{i_1,\dots,i_m}\,)^{t/2} \ge \max_{k=0,m}\ \max_{1\le j_1<\dots<j_k\le m}\ \sum_{1\le i_{j_1}<\dots<i_{j_k}\le n} E\,($$

$$\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} E(Z^2_{i_1,\dots,i_m}/X_{i_{j_1}},\dots,X_{i_{j_k}},X'_{i_{j_1}},\dots,X'_{i_{j_k}}\,))^{t/2}\,. \qquad (2.50)$$

Очевидно, что

$$\sum_{1\le i_{j_1}<\dots<i_{j_k}\le n} E\,(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} E(Z^2_{i_1,\dots,i_m}/X_{i_{j_1}},\dots,X_{i_{j_k}},X'_{i_{j_1}},\dots,X'_{i_{j_k}}\,))^{t/2} =$$

$$= \sum_{1\le i_{j_1}<\dots<i_{j_k}\le n} E\,(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} E(Y^2_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})/X_{i_{j_1}},\dots,X_{i_{j_k}}\,) +$$

$$+ E(Y^2_{i_1,\dots,i_m}(X'_{i_1},\dots,X'_{i_m})/X'_{i_{j_1}},\dots,X'_{i_{j_k}}\,) \ge$$

$$\ge \sum_{1\le i_{j_1}<\dots<i_{j_k}\le n} 2\,E\,(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\dots,j_k,\\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} E(Y^2_{i_1,\dots,i_m}(X_{i_1},\dots,X_{i_m})/X_{i_{j_1}},\dots,X_{i_{j_k}}\,)\,)^{t/2}\,. \qquad (2.51)$$

для всех $1\le j_1<\dots<j_k\le m\,,\ \ k=0,m\,.$

Используя уже доказанную теорему 2.7, из (2.50), (2.51) получаем, что

$$E\,(\sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le n} Z^2_{i_1,\dots,i_m}\,)^{t/2} \ge A(t,m)\,E\,(\sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le n} Y^2(i_1,\dots,i_m)\,)^{t/2}\,. \qquad (2.52)$$

Из (2.46)-(2.49) и (2.52) получаем соотношения (2.36) для $t\ge 2$ и (2.37) для $1\le t<2$.

Докажем правую часть (2.35). Легко видеть, что при условиях теоремы 2.8 с.в. $Y(i_m)$, $i_m=m,\dots,n$ образуют мартингал-разность относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\dots,X_{i_m})$, с.в. $Y(i_k,\dots,i_m)$, $i_k=k,\dots,i_{k+1}-1$ образуют мартингал-разность относительно σ-алгебр $\sigma(X_1,X_2,\dots,X_{i_k},X_{i_{k+1}},\dots,X_{i_m})$, $k+1\le i_{k+1}<\dots<i_m\le n$, $k=1,\dots,m-1$.

Используя лемму 2.2, имеем, что

$$E|T_{n,m}|^t \le B(t)\max\Big(\sum_{i_m=m}^{n} E|Y(i_m)|^t\ ,\ E\Big(\sum_{i_m=m}^{n} E(Y^2(i_m)/X_1,\dots,X_{i_m-1})\Big)^{t/2}\Big), \tag{2.53}$$

$$E|Y(i_k,\dots,i_m)|^t \le B(t)\max\Big(\sum_{i_{k-1}=k-1}^{i_k-1} E|Y(i_{k-1},\dots,i_m)|^t,$$

$$E\Big(\sum_{i_{k-1}=k-1}^{i_k-1} E(Y^2(i_{k-1},\dots,i_m)/X_1,\dots,X_{i_{k-1}-1},X_{i_k},\dots,X_{i_m})\Big)^{t/2}\Big). \tag{2.54}$$

для всех $k\le i_k<\dots<i_m\le n$, $k=2,\dots,m$.

Из (2.53), (2.54) вытекает, что

$$E|T_{n,m}|^t \le B(t)\max_{k=1,m-1}\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le m} E|Y(i_1,i_2,\dots,i_m)|^t,\ E\Big(\sum_{i_m=m}^{n} E(Y^2(i_m)/X_1,\dots,X_{i_m-1})\Big)^{t/2},$$

$$\sum_{k+1\le i_{k+1}<\dots<i_m\le n} E\Big(\sum_{i_k=k}^{i_{k+1}-1} E(Y^2(i_k,\dots,i_m)/X_1,X_2,\dots,X_{i_k-1},X_{i_{k+1}},\dots,X_{i_m})\Big)^{t/2}\Big). \tag{2.55}$$

Из (2.55) имеем, что

$$E|T_{n,m}|^t \le B(t,m)\max_{k=2,m-1}\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le n} E|Y(i_1,i_2,\dots,i_m)|^t,$$

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le n} E(Y^2(i_1,i_2,\dots,i_m)/X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_{m-1}})\Big)^{t/2},$$

$$\sum_{k+1\le i_{k+1}<\dots<i_m\le m} E\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le i_{k+1}-1} E(Y^2(i_1,i_2,\dots,i_m)/X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_{k-1}},X_{i_{k+1}},\dots,X_{i_m})\Big)^{t/2}\Big) +$$

$$+\ B(t,m)\max_{k=2,m-1}\Big(E\Big|\sum_{s=m}^{2m-2}\ \sum_{\substack{(\alpha,m-1)\\(\beta,m-1)}}\ \sum_{1\le i_1<\dots<i_s\le n-1}\ \sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\dots,i\alpha_{m-1},i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\dots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i_1},\dots,X_{i_s})\Big|^{t/2},$$

$$\sum_{k+1\le i_{k+1}<\dots<i_m\le n} E\Big|\sum_{s=k}^{2k-2}\ \sum_{\substack{(\alpha,k-1)\\(\beta,k-1)}}\ \sum_{1\le i_1<\dots<i_s\le i_{k+1}-2}\ \sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i\alpha_1,\dots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1}\dots,i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\dots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1}\dots,i_m)/X_{i_1},\dots,X_{i_s},X_{i_{k+1}},\dots,X_{i_m})\Big|^{t/2}\Big) = \Sigma_1 + \Sigma_2\ , \tag{2.56}$$

где $\sum\limits_{\substack{(\alpha,k-1)\\(\beta,k-1)}}$, $k=2,m$, означает суммирование по всем $1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_{k-1}\le s$, $1\le\beta_1<\ldots<\beta_{k-1}\le s$, таким, что вектор $(\alpha,k-1)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})$ лексикографически меньше, чем вектор $(\beta,k-1)=(\beta_1,\ldots,\beta_{k-1})$ (то есть существует индекс j , $j=1,\ldots,k-1$, для которого $\alpha_i=\beta_i$, $i=1,\ldots,j-1$, $\alpha_j<\beta_j$).

Из теоремы 2.7 следует, что

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} E(Y^2(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{m-1})\Big)^{t/2} =$$

$$= E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{m-1}\le n}\ \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n} E(Y^2(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{m-1})\Big)^{t/2} \le$$

$$\le B(t/2,m-1)\max_{k=0,m-1}\ \max_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m-1}\ \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_k\le n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_m\le n}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k}))^{t/2}$$

при $t>2$. Далее,

$$E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le i_{k+1}-1} E(Y^2(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{k-1},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^{t/2} =$$

$$= E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le i_{k+1}-1}\ \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{i_{k+1}-1} E(Y^2(i_1,i_2,\ldots,i_m)/Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_{k-1},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^{t/2} \le$$

$$\le B(t/2,k-1)\max_{s=0,m-1}\ \max_{1\le j_1<\ldots<j_s\le k-1}\ \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_s\le i_{k+1}-1} E\Big(\sum_{\substack{i_r:\ r\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_k\le i_{k+1}-1}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k},\ Xi_{k+1},\ldots,Xi_m))^{t/2}$$

для всех $k+1\le i_{k+1}<\ldots<i_m\le n$, $k=1,\ldots,m-1$.

Следовательно,

$$\Sigma_1 \le B(t/2,m)\max_{s=0,m}\ \max_{1\le j_1<\ldots<j_s\le m}\ \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_s\le n} E\big(E(Y^2(ij_1,\ldots,ij_s)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_s}))^{t/2} \qquad (2.57)$$

для всех $t>2$. Очевидно, что

$$\Sigma_2 \le B(t,m) \max_{k=2,m-1} \Big(\sum_{s=m}^{2m-2} \sum_{\substack{(\alpha,m-1)\\(\beta,m-1)}} E \,\Big| \sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1} \sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s) \Big|^{t/2},$$

$$\sum_{k+1\le i_{k+1}<\ldots<i_m\le n} \sum_{s=k}^{2k-2} \sum_{\substack{(\alpha,k-1)\\(\beta,k-1)}} E\Big| \sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2} \sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s,Xi_{k+1},\ldots,Xi_m) \Big|^{t/2} \Big) . \tag{2.58}$$

Пусть $\alpha j_i=\beta j_i=\gamma_i$, $i=1,\ldots,r$, $1\le j_1<\ldots<j_r\le m-1$. Тогда в силу уже доказанного соотношения (2.37), неравенств Шварца и Коши (см. предыдущий параграф) и оценки $(x+y)^p\le x^p+y^p$, $x,y\ge 0$, $0<p\le 1$, имеем, что

$$E\,\Big| \sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1} \sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s) \Big|^{t/2} \le$$

$$\le B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1} \Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s) \Big)^2 \Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{1\le i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\le n-1} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\ j\ne\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1}} \Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s) \Big)^2 \Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{1\le i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\le n-1} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\ j\ne\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1}} E\Big(\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s) \Big)^2/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r} \Big) \Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{1\le i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\le n-1} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\ j\ne\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1}} E\Big(\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} \Big(E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)/$$

$$X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{m-1}} \Big)\Big)^{1/2}\Big(E(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{m-1}} \Big)\Big)^{1/2} \Big)^2/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r} \Big) \Big)^{t/4} \le$$

$$\leq \sum_{1\leq i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\leq n-1} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\, j\neq\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n-1}} E\Big(\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)/$$

$$X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{m-1}})\Big)\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{m-1}})\Big)/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r}\Big)\Big)^{t/4} =$$

$$= \sum_{1\leq i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\leq n-1} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\, j\neq\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\leq i_1<\ldots<i_s\leq n-1}} \Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r})\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r})\Big)\Big)^{t/4} \leq$$

$$\leq \sum_{1\leq ij_1<\ldots<ij_r\leq n} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\neq j_1,\ldots,j_r,\\ 1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/X_{ij_1},\ldots,X_{ij_t})\Big)^{t/2}. \tag{2.59}$$

Аналогично,

$$E\Big| \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq i_{k+1}-2} \ \sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1}\ldots,i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1}\ldots,i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s,Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big|^{t/2} \leq$$

$$\leq B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_s\leq i_{k+1}-2} \Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1}\ldots,i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1}\ldots,i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s,Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^2\Big)^{t/2} \leq$$

$$\leq \sum_{1\leq i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\leq i_{k+1}-2} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\, j\neq\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\leq i_1<\ldots<i_s\leq i_{k+1}-2}} E\Big(\Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1}\ldots,i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1}\ldots,i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s,Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^2/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r}\Big)\Big)^{t/4} \leq$$

$$\le \sum_{1\le i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\le i_{k+1}-2} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\ j\ne\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2}} E\Big(\Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} \Big(E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{k-1}},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)\Big)^{1/2}\Big(E\Big(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{k-1}},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^{1/2}\Big)^2/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r}\Big)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{1\le i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\le i_{k+1}-2} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\ j\ne\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2}} E\Big(\Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{k-1}},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)\Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{k-1}},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)\Big)/X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r}\Big)\Big)^{t/4} \le$$

$$\le \sum_{1\le i\gamma_1<\ldots<i\gamma_r\le i_{k+1}-2} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_j,\ j\ne\gamma_1,\ldots,\gamma_r\\ 1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2}} \Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)\Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E\Big(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\gamma_1},\ldots,X_{i\gamma_r},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)\Big)^{t/4} \le \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_r\le i_{k+1}-2} B(t/2,s)\, E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_r,\\ 1\le i_1<\ldots<i_k\le i_{k+1}-2}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_r},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^{t/2}. \tag{2.60}$$

Из соотношений (2.56)-(2.60) следует, что правое неравенство (2.35) верно в случае $2\le t<4$.

Пусть, так же, как в предыдущем параграфе, $\alpha(t)=[t/2]$, $2\le t<\infty$. По только что доказанному утверждению правая часть неравенства (2.35) верна при всех t, для которых $\alpha(t)=1$.

Зафиксируем произвольное t с $\alpha(t)=l\ge 2$. Предположим, что справедливость правого неравенства (2.35) уже доказана для всех статистик вида

$$T_{n,m} = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},X_{i_2},\ldots,X_{i_m}) \ ,$$

где $n=1,2,\ldots,$ $1\le m\le n$, а функции $Y_{i_1,\ldots,i_m}$: $\mathscr{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\le i_k\le n$, $i_r\ne i_s$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, удовлетворяют условиям

$$E\,|\,Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})\,|^t<\infty \ ,$$

$$Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})=Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_{\pi(1)}},\ldots,X_{i_{\pi(m)}}) \quad \text{(п.н.)}$$

$$E(Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})/X_{i_{\pi(1)}},\ldots,X_{i_{\pi(m-1)}})=0 \quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\ldots,m\}$ при t с $a(t)=l-1$, уже доказана.

Используя предположение индукции с учетом замечания 2.2, получаем, что

$$E\,\Big|\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1}\ \sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i_1},\ldots,X_{i_s})\Big|^{t/2}\le$$

$$\le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1}\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i_1},\ldots,X_{i_s})\Big)^2\Big)^{t/2}\le$$

$$\le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1}\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n}\big(E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)/X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{m-1}})\big)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\big(E(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{m-1}})\big)^{1/2}\Big)^2\Big)^{t/4}\le$$

$$\le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n-1}\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{m-1},i_m)/X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{m-1}})\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{i_m=i_s+1}^{n} E(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{m-1},i_m)/X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{m-1}})\Big)\Big)^{t/4}\le$$

$$\le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{m-1}\le n-1}\ \sum_{i_m=i_{m-1}+1}^{n} E(Y^2(i_1,\ldots,i_{m-1},i_m)/X_{i_1},\ldots,X_{i_{m-1}})\Big)^{t/2}\le$$

$$\le B(t/2,m-1)\max_{k=0,m-1}\ \max_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m-1}\ \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_k\le n} E\Big(\sum_{\substack{i_s:\ s\ne j_1,\ldots,j_k,\\ 1\le i_1<\ldots<i_m\le n}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k})\Big)^{t/2}. \tag{2.61}$$

Аналогично,

$$E\Big| \sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2} \sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s,Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big|^{t/2} \le$$

$$\le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2} \Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)\cdot$$

$$\cdot Y(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/Xi_1,\ldots,Xi_s,Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^2\Big)^{t/4} \le$$

$$\le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2} \Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} \big(E(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{k-1}},$$

$$Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\big)^{1/2}\big(E\big(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{k-1}},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m\big)\big)^{1/2}\Big)^2\Big)^{t/4} \le$$

$$\le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le i_{k+1}-2} \Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E\big(Y^2(i\alpha_1,\ldots,i\alpha_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\alpha_1},\ldots,X_{i\alpha_{k-1}},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m\big)\Big)\Big(\sum_{i_k=i_s+1}^{i_{k+1}-1} E(Y^2(i\beta_1,\ldots,i\beta_{k-1},i_k,i_{k+1},\ldots,i_m)/$$

$$X_{i\beta_1},\ldots,X_{i\beta_{k-1}},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)\Big)^{t/4} \le B(t/2,s)\,E\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le i_{k+1}-2} \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{i_{k+1}-1} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$Xi_1,\ldots,Xi_{k-1},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^{t/2} \le$$

$$\le B(t/2,k-1)\max_{s=0,k-1}\ \max_{1\le j_1<\ldots<j_s\le k-1}\ \sum_{1\le ij_1<\ldots<ij_s\le i_{k+1}} E\Big(\sum_{\substack{i_l:\ l\ne j_1,\ldots,j_s,\\ 1\le i_1<\ldots<i_k\le i_{k+1}}} E(Y^2(i_1,\ldots,i_m)/$$

$$X_{ij_1},\ldots,X_{ij_k},Xi_{k+1},\ldots,Xi_m)\Big)^{t/2}. \tag{2.62}$$

Из (2.56)-(2.58), (2.61), (2.62) следует, что правое неравенство (2.33) верно для всех статистик

$$T_{n,m} = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} Yi_1,\ldots,i_m(Xi_1,Xi_2,\ldots,Xi_m)\ ,$$

где $n=1,2,\ldots,$ $1\le m\le n$, а функции $Y_{i_1,\ldots,i_m}\colon \mathscr{E}^m\to\mathbb{R}$, $1\le i_k\le n$, $i_r\ne i_s$, $r\ne s$, $k,r,s=1,\ldots,m$, удовлетворяют условиям

$$E\,|\,Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})\,|^t<\infty\ ,$$

$$Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})=Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_{\pi(1)}},\ldots,X_{i_{\pi(m)}})\quad \text{(п.н.)}$$

$$E(Y_{i_1,\ldots,i_m}(X_{i_1},\ldots,X_{i_m})/X_{i_{\pi(1)}},\ldots,X_{i_{\pi(m-1)}})=0\quad \text{(п.н.)}$$

для всех $1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le n$ и всех перестановок π множества $\{1,2,\ldots,m\}$ при выбранном нами t . По принципу индукции соотношение (2.33) доказано. Используя замечание 2.2, получаем соотношения (2.35) и (2.37) при $t\ge 2$. Теорема полностью доказана.

2.5. Моментные неравенства для многовыборочных статистик с переменным ядром.

Этот параграф содержит аналоги неравенств Розенталя и Марцинкевича-Зигмунда для многовыборочных статистик. Формулируемые теоремы легко доказываются при помощи перехода к условным математическим ожиданиям и небольшой модификации рассуждений предыдущего параграфа.

Рассмотрим c независимых серий $\{X_{j1},\ldots,X_{jn(j)}\}$, $j=1,\ldots,c$, независимых с.в. Все величины из j-й серий принимают значения в измеримом пространстве $(\mathcal{E}_j, A_j)$. Пусть $1 \le m(j) \le n(j)$, $m=(m(1),\ldots,m(c))$, $n=(n(1),\ldots,n(c))$.

Пусть $K(t,m)$ - класс функций

$$Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c):\ \mathcal{E}_1^{m(1)} \times\ldots\times \mathcal{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R},$$

$1 \le i_{jk} \le n_j$, $i_{jr} \ne i_{js}$, $r \ne s$, $k,r,s=1,\ldots,m(j)$, $j=1,\ldots,c$, удовлетворяющих условиям

$$E\,|\,Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)\,|^t<\infty,$$

$$Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)=$$

$$=Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,k,\ i_{kr},\ r=\pi_k(1),\ldots,\pi_k(m(k)),i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=k+1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),$$
$$j=1,\ldots,k,\ X_{ka},\ a=ik\pi_k(1),\ldots,ik\pi_k(m(k)),X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=k+1,\ldots,c)$$

для всех $1 \le i_{j1} < i_{j2} < \ldots < ijm(j) \le n(j)$, $j=1,\ldots,c$, и всех перестановок π_k множества $\{1,2,\ldots,m(k)\}$, $k=1,\ldots,c$. Через $L(t,m)$ будем обозначать подмножество $K(t,m)$, состоящее из функций Y, для которых

$$E(Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c)/X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,k,\ X_{ka},$$
$$a=ik\pi_k(1),\ldots,ik\pi_k(m(k)\text{-}1),X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=k+1,\ldots,c)$$

для всех $1 \le i_{j1} < i_{j2} < \ldots < ijm(j) \le n(j)$, $j=1,\ldots,c$, и всех перестановок π_k множества $\{1,2,\ldots,m(k)\}$, $k=1,\ldots,c$.

Рассмотрим многовыборочную симметрическую статистику с переменным ядром

$$W_{n,m,c} = \sum Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\ldots,ijm(j),\ j=1,\ldots,c),$$

где суммирование осуществляется по всем $1 \le i_{j1} < i_{j2} < \ldots < ijm(j) \le n(j)$, $j=1,\ldots,c$.

Теорема 2.10. Если

$$Y(i_{jr},\ r=1,\ldots,m(j),\ j=1,\ldots,c):\ \mathcal{E}_1^{m(1)} \times\ldots\times \mathcal{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R},$$

$1 \le i_{jk} \le n(j)$, $i_{jr} \ne i_{js}$, $r \ne s$, $k,r,s=1,\ldots,m(j)$, - неотрицательные функции, принадлежащие классу $K(t,m)$, $t \geq 1$, то

$$\max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \max_{\substack{1\leq l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\leq m(1)\\ \dots \\ 1\leq l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\leq m(c)}} \sum_{\substack{1\leq i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\leq n(1)\\ \dots \\ 1\leq icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\leq n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\neq l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\leq i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\leq n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\big(Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja}, a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c\big)^t \leq$$

$$\leq EW_{n,m,c}^{\ t} \leq$$

$$\leq B(t,m,c) \max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \max_{\substack{1\leq l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\leq m(1)\\ \dots \\ 1\leq l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\leq m(c)}} \sum_{\substack{1\leq i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\leq n(1)\\ \dots \\ 1\leq icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\leq n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\neq l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\leq i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\leq n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\big(Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja}, a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c\big)^t .$$

Теорема 2.11. Если

$$Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c):\ \mathscr{E}_1^{m(1)} \times\dots\times \mathscr{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R} ,$$

$1\leq i_{jk}\leq n(j)$, $i_{jr}\neq i_{js}$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\dots,m(j)$, - функции, принадлежащие классу $L(t,m)$, $t\geq 2$, то

$$A(t,m,c) \max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \max_{\substack{1\leq l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\leq m(1)\\ \dots \\ 1\leq l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\leq m(c)}} \sum_{\substack{1\leq i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\leq n(1)\\ \dots \\ 1\leq icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\leq n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\neq l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\leq i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\leq n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\big(Y^2(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja},\ a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c\big)^{t/2} \leq$$

$$\leq E\,|\,W_{n,m,c}\,|^{\,t} \leq$$

$$\leq B(t,m,c) \max_{\substack{k(1)=0,m(1)\\ \dots \\ k(c)=0,m(c)}} \max_{\substack{1\leq l_{11}<\dots<l_{1k(1)}\leq m(1)\\ \dots \\ 1\leq l_{c1}<\dots<l_{ck(c)}\leq m(c)}} \sum_{\substack{1\leq i1l_{11}<\dots<i1l_{1k(1)}\leq n(1)\\ \dots \\ 1\leq icl_{c1}<\dots<icl_{ck(c)}\leq n(c)}} E\Big(\sum_{\substack{i_{ja}:\ a\neq l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\\ 1\leq i_{j1}<\dots<i_{jm(j)}\leq n(j)\\ j=1,\dots,c}} E\big(Y^2(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja}, a=ij_1,\dots,ijm(j),\ j=1,\dots,c)/\,X_{ja},\ a=l_{j1},\dots,l_{jk(j)},\ j=1,\dots,c\big)^{t/2} .$$

Теорема 2.12. Если

$$Y(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c):\ \mathscr{E}_1^{m(1)} \times\dots\times \mathscr{E}_c^{m(c)} \to \mathbb{R} ,$$

$1\leq i_{jk}\leq n(j)$, $i_{jr}\neq i_{js}$, $r\neq s$, $k,r,s=1,\dots,m(j)$, - функции, принадлежащие классу $L(t,m)$, $t\geq 2$, то

$$A(t,m,c)\, E\Big(\sum Y^2(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja},\ a=i j_1,\dots,i j m(j),\ j=1,\dots,c)\Big)^{t/2} \le$$

$$\le E\,|W_{n,m,c}|^t \le$$

$$\le B(t,m,c)\, E\Big(\sum Y^2(i_{jr},\ r=1,\dots,m(j),\ j=1,\dots,c)(X_{ja},\ a=i j_1,\dots,i j m(j),\ j=1,\dots,c)\Big)^{t/2}.$$

2.6. Моментные неравенства для U-статистик. Примеры.

Пусть $X_1,\dots,X_n$ - независимые с.в., принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{E}, A)$ и имеющие на нем одно и тоже распределение P, которое может, вообще говоря, зависеть от n (такое допущение позволяет охватить U-статистики от схем-серий независимых с.в.), $\mathcal{P}=\{P\}$ - некоторый класс вероятностных распределений на $(\mathcal{E}, A)$. Пусть, далее, $\theta:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$,

$$\theta(P) = \int \dots \int \Phi(x_1,\dots,x_m)P(dx_1)\dots P(dx_m) \text{ -}$$

параметрический функционал с симметрическим ядром $\Phi:\mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$, которое также может быть переменным, то есть зависеть от n,

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le n} \Phi(X_{i_1},\dots,X_{i_m}) \text{ -}$$

U-статистика, являющаюся симметрической несмещенной оценкой $\theta(P)$.

Из теоремы 2.7 очевидным образом вытекает следующая

Теорема 2.13. Если $\Phi:\mathcal{E}^m\to\mathbb{R}$ - неотрицательная функция, для которой $E\Phi^t(X_1,\dots,X_m)<\infty,\ t\ge 1$, то

$$\binom{n}{m}^{-t} \max_{k=1,m-1} \Big(\binom{n}{m} E\Phi^t(X_1,\dots,X_m),\ \binom{n}{m}^t (E\Phi(X_1,\dots,X_m))^t,$$

$$\sum_{i_m=m}^{n}\ \sum_{i_{m-1}=m-1}^{i_m-1} \dots \sum_{i_{m-k+1}=m-k+1}^{i_{m-k}-1} \binom{i_{m-k+1}-1}{m-k}^t E(E(\Phi(X_1,\dots,X_m)/X_1,\dots,X_k))^t \le EU_n^t \le$$

$$\le B(t,m) \binom{n}{m}^{-t} \max_{k=1,m-1} \Big(\binom{n}{m} E\Phi^t(X_1,\dots,X_m),\ \binom{n}{m}^t (E\Phi(X_1,\dots,X_m))^t,$$

$$\sum_{i_m=m}^{n}\ \sum_{i_{m-1}=m-1}^{i_m-1} \dots \sum_{i_{m-k+1}=m-k+1}^{i_{m-k}-1} \binom{i_{m-k+1}-1}{m-k}^t E(E(\Phi(X_1,\dots,X_m)/X_1,\dots,X_k))^t.$$

Пусть $g_c(x_1,\dots,x_c)$, $c=1,\dots,m$, -канонические функции, соответствующие ядру Φ, r-ранг U-статистики U_n, то есть первое целое число, для которого выполняются соотношения

$$g_1 = \ldots = g_{r-1} = 0 \, , \; g_r \neq 0$$

(см. [6, стр.18-21]). Согласно представлению Геффдинга [6, стр. 21] справедлива формула

$$U_n - \theta \; = \; \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c} U_{nc} \, ,$$

где

$$U_{n,c} = \binom{n}{c}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_c \le n} g_c(Xi_1, \ldots, Xi_c) \, .$$

Учитывая, что функции $g_c(x_1,\ldots,x_c)$, $c = 1,\ldots,m$, обладают свойством полной вырожденности, то есть

$$E(g_c(X_1,\ldots,X_c)/X_1,\ldots,X_{c-1}) = 0 \; (\text{п.н.}) \, , \; c = 1,\ldots,m \, ,$$

и используя соотношение

$$E\,|\,U_n - \theta\,|^{\,t} \le (m-r+1)^{t-1} \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c}^{t} E\,|\,U_{nc}\,|^{\,t}$$

и теорему 2.8, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.14. Для U-статистики U_n ранга r и любого $t \ge 2$ имеет место неравенство

$$E\,|\,U_n - \theta\,|^{\,t} \le (m-r+1)^{t-1} \sum_{c=r}^{m} \binom{m}{c}^{t} \binom{n}{c}^{-t} B(t,c) \max_{k=1,c-1} \Big(\binom{n}{c} E\,|\,g_c(X_1,\ldots,X_c)\,|^{\,t},$$

$$\binom{n}{c}^{t/2} (Eg_c^{\,2}(X_1,\ldots,X_c))^{t/2}, \; \sum_{i_c=c}^{n} \; \sum_{i_{c-1}=c-1}^{i_c - 1} \ldots \sum_{i_{c-k+1}=c-k+1}^{i_{c-k}-1} \binom{i_{c-k+1}-1}{c-k}^{t/2} E(E(g_c^{\,2}(X_1,\ldots,X_c)/$$

$$X_1,\ldots,X_k))^{t/2} \Big) \, .$$

Из теорем 2.13, 2.14 вытекают следующие оценки моментов U-статистик второго порядка. Пусть

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} \Phi(X_i, X_j) \, ,$$

где $\Phi: \mathscr{X}^2 \to \mathbf{R}$ -симметрическая функция двух переменных. Если $\Phi: \mathscr{X}^2 \to \mathbf{R}$ - неотрицательная функция, для которой $E\Phi^t(X_1,X_2) < \infty$, $t \ge 1$, то

$$\max \Big(\binom{n}{2}^{-t+1} E\Phi^t(X_1,X_2) \, , \; \binom{n}{2}^{-t} \Big(\sum_{j=1}^{n-1} j^t \Big) E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)^t \, , \; E(\Phi(X_1,X_2))^t \Big) \le EU_n^t \le$$

$$\le B(t,2)\max\left(\binom{n}{2}^{-t+1}E\Phi^t(X_1,X_2),\ \binom{n}{2}^{-t}\left(\sum_{j=1}^{n-1}j^t\right)E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)^t,\ E(\Phi(X_1,X_2))^t\right).$$

Если $t\ge 2$, то для любой U-статистики U_2 с ядром Φ, удовлетворяющим условию $E|\Phi(X_1,X_2)|^t<\infty$, имеет место неравенство

$$E|U_n-\theta|^t \le 2^{2t-1}B(t,1)\max\left(n^{-t+1}E|g_1(X_1)|^t,\ n^{-t/2}(Eg_1^2(X_1))^{t/2}\right)+$$

$$+2^{t-1}B(t,2)\max\left(\binom{n}{2}^{-t+1}E|g_2(X_1,X_2)|^t,\ \binom{n}{2}^{-t}\left(\sum_{j=1}^{n}j^{t/2}\right)E(E(g_2^2(X_1,X_2)/X_1))^{t/2},\right.$$

$$\left.\binom{n}{2}^{-t/2}(Eg_2^2(X_1,X_2))^{t/2}\right),$$

то есть

$$E|U_n-\theta|^t\le 2^{2t-1}B(t,1)\max\left(n^{-t+1}E|E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)-\theta|^t,\ n^{-t/2}(E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)-\theta)^2)^{t/2}\right)+$$

$$+\ 2^{t-1}B(t,2)\max\left(\binom{n}{2}^{-t+1}E|\Phi(X_1,X_2)-E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)-E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_2)+\theta|^t,\right.$$

$$\binom{n}{2}^{-t}\left(\sum_{j=1}^{n}j^{t/2}\right)E(E(\Phi(X_1,X_2)-E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)-E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_2)+\theta)^2/X_1)\,)^{t/2},$$

$$\left.\binom{n}{2}^{-t/2}(E(\Phi(X_1,X_2)-E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_1)-E(E(\Phi(X_1,X_2)/X_2)+\theta)^2\,)^{t/2}\right).$$

<u>Пример 2.1.</u> Выборочная дисперсия $\theta(F)=\sigma^2(F)=\int(x-\mu)dF(x)$ ($\mu=\int xdF(x)$),

$$\Phi(x_1,x_2)=\tfrac{1}{2}(x_1-x_2)^2,\ U_n=1/n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2=\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\le i<j\le n}\Phi(X_i,X_j).$$

$$\max\left(\binom{n}{2}^{-t+1}E(X_1-X_2)^{2t},\ \binom{n}{2}^{-t}\left(\sum_{j=1}^{n-1}j^t\right)E(X_1-\mu)^{2t},\ (E(X_1-X_2)^2)^t\right)\le EU_n^t\le$$

$$\le B(t,2)\max\left(\binom{n}{2}^{-t+1}E(X_1-X_2)^{2t},\ \binom{n}{2}^{-t}\left(\sum_{j=1}^{n-1}j^t\right)E(X_1-\mu)^{2t},\ (E(X_1-X_2)^2)^t\right).$$

$$E|U_n-\theta|^t\le 2^{t-1}B(t,1)\max\left(n^{-t+1}E(X_1-\mu)^{2t},\ n^{-t/2}\sigma^t(X_1)\right)+$$

$$+\ 2^{t-1}B(t,2)\max\left(\binom{n}{2}^{-t+1}E|X_1X_2+X_1\mu+X_2\mu-\mu^2|^t,\right.$$

$$\binom{n}{2}^{-t}\left(\sum_{j=1}^{n}j^{t/2}\right)E(E(X_1X_2+X_1\mu+X_2\mu-\mu^2)^2/X_1))^{t/2},\ \binom{n}{2}^{-t/2}(E(X_1X_2+X_1\mu+$$

$$\left.+X_2\mu-\mu^2)^2\,)^{t/2}\right).$$

Аналогично можно оценить моменты и других U-статистик. Так как полученные соотношения довольно громоздки, всюду в рассматриваемых ниже примерах мы ограничимся лишь вычислением канонических функций. Выписать соответствующие оценки (2.63) и (2.64) не составляет труда.

Пример 2.2. Средняя разность Джини (ср. с коэффициентом Джини во введении).

$$\theta(F)=E|X_1-X_2| ,$$

$$\Phi(x_1,x_2)=|x_1-x_2| ,$$

$$U_n=\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\le i<j\le n}|X_i-X_j| ,$$

$$g_1(x_1) = E|x_1-X_2| - E|X_1-X_2| ,$$

$$g_2(x_1,x_2) = |x_1-x_2| - E|x_1-X_2| - E|X_1-x_2| + E|X_1-X_2| .$$

Пример 2.3. Одновыборочная статистика Вилкоксона.

$$\theta(F)=P(X_1+X_2\le 0) ,$$

$$\Phi(x_1,x_2)=I(x_1+x_2\le 0) ,$$

$$U_n=\binom{n}{2}^{-1}\sum_{1\le i<j\le n}I(X_i+X_j\le 0) ,$$

$$g_1(x_1)=P(X_2\le -x_1)-P(X_1+X_2\le 0) ,$$

$$g_2(x_1,x_2)=I(x_1+x_2\le 0)-P(X_2\le -x_1)-P(X_1\le -x_2)+P(X_1+X_2\le 0) .$$

Пример 2.4. Функционалы от оценки плотности вероятности (см. [6, стр. 212, 213].

Пусть $X_1,\dots,X_n$ - независимая выборка из совокупности с функцией распределения F(x) и плотностью $f(x)=F'(x)$. Пусть

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx ,$$

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dF_n(x) ,$$

где $F_n(x)$ - эмпирическая функция распределения,

$$f_n(x) = (1/na_n) \sum_{i=1}^{n} W((x-X_i)/a_n) = (1/a_n) \int_{-\infty}^{\infty} W((x-y)/a_n)dF_n(y) -$$

ядерная оценка Розенблатта для $f(x)$, $W(x)$ -симметричная относительно нуля плотность распределения, а последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям $a_n>0$, $a_n \to 0$ при $n\to\infty$. Известно [6, стр.213], что J_n является асимтотически несмещенной оценкой J при условии $na_n\to\infty$. J_n можно представить в виде U-статистики

$$J_n - EJ_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\le i<j\le n} \Phi_n(X_i,X_j)$$

с ядром

$$\Phi_n(x_1,x_2) = ((n-1)/(na_n)) (W(a_n^{-1}(x_1-x_2)) - EW(a_n^{-1}(X_1-X_2))) .$$

Нетрудно видеть, что

$$g_1(x_1) = ((n-1)/n) \int_{-\infty}^{\infty} W(x)f(x_1+xa_n)dx - ((n-1)/n) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x)f(y+xa_n)f(y)dxdy ,$$

$$g_2(x_1,x_2) = ((n-1)/(na_n)) (W(a_n^{-1}(x_1-x_2)) - ((n-1)/n) \int_{-\infty}^{\infty} W(x)f(x_1+xa_n)dx -$$

$$- ((n-1)/n) \int_{-\infty}^{\infty} W(x)f(x_2+xa_n)dx + ((n-1)/n) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x)f(y+xa_n)f(y)dxdy .$$

2.7. К вопросу о точных константах в моментных неравенствах для симметрических статистик.

К сожалению, вопрос о точных константах в полученных нами неравенствах (2.9)-(2.11) остается открытым. В качестве первого приближения к ответу на него естественно хотя бы найти точный порядок роста констант в аналогах этих неравенств для норм, которые получаются возведением обеих частей неравенств для моментов в степень $1/t$, то есть дать двусторонние оценки одинакового порядка для $(B(t,m))^{1/t}$. Как уже говорилось во введении и в первой главе, в случае линейных статистик точный порядок роста констант $(B(t,1))^{1/t}$ в неравенствах Розенталя для неотрицательных с.в. и с.в. с нулевым средним при $t\to\infty$ есть $t/\ln t$. Для нелинейных статистик правдоподобной представляется гипотеза, что точный порядок роста верхних констант $B_1(t,m)$ и $B_2(t,m)$ в аналогах неравенств (2.9), (2.10) для норм при $t\to\infty$ есть $(t/\ln t)^m$. В настоящем параграфе мы приведем примеры (ср. с предложениями 2.9 и 4.3 работы [8]), показывающие, что константы $B_1(t,m)$ и

$B_2(t,m)$ в аналогах неравенств (2.9), (2.10) растут не медленнее, чем $(t/\ln t)^m$ при $t\to\infty$, то есть доказывающие эту гипотезу наполовину.

Пример 2.5. Пусть $t>1$ - достаточно большое число, $n\geq m$. Пусть $X_1,X_2,X_3,\ldots$ - независимые с.в. с распределением

$$P(X_i=1)=\ln t/t\,,\quad P(X_i=0)=1-\ln t/t\ .$$

Тогда

$$\Big\| \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1\ldots Xi_m \Big\|_t \geq \binom{n}{m} \Big(P\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1\ldots Xi_m = \binom{n}{m}\Big)\Big)^{1/t} \geq \binom{n}{m} (P(X_i=1))^{n/t} \geq$$

$$\geq A(m)\, n^m\, (\ln t/t)^{n/t}\ .$$

Согласно следствию 2.1

$$A(m)\, n^m\, (\ln t/t)^{n/t} \leq B_1(t,m) \max_{k=0,m} n^{(m-k)+k/t} (EX_1^{\,t})^{k/t} (EX_1)^{(m-k)}\ .$$

Следовательно,

$$B_1(t,m) \geq A(m) \min_{k=0,m} n^{k-k/t} (\ln t/t)^{n/t-(m-k)-k/t}\ .$$

Выбирая n таким, что $n-1 \leq t/\ln t \leq n$, получаем, что

$$B_1(t,m) \geq A(m)\, (t/\ln t)^m\, (\ln t/t)^{1/t+1/\ln t}\ .$$

Поскольку функция $y(x)=x^{1/x}$ убывает по $e\leq x<\infty$, для любого $t\geq e^e$ справедливо неравенство

$$(\ln t)^{1/\ln t} \geq t^{1/t}\ ,$$

то есть $B_1(t,m) \geq A(m)\, (t/\ln t)^m$. Значит, константа $B_1(t,m)$ при $t\to\infty$ растет не медленнее, чем $(t/\ln t)^m$, что и требовалось доказать.

Пример 2.6. Пусть $t>2$ - достаточно большое число, $n\geq m$. Пусть $X_1,X_2,X_3,\ldots$ - независимые с.в. с распределением

$$P(X_i=1)=\ln t/t\,,\quad P(X_i=-1)=\ln t/t\,,\quad P(X_i=0)=1-2\ln t/t\ .$$

Тогда точно так же, как в предыдущем примере,

$$\Big\| \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} Xi_1\ldots Xi_m \Big\|_t \geq A(m)\, n^m\, (\ln t/t)^{n/t}\ .$$

Используя следствие 2.2 и выбирая n таким, что $n-1 \leq t/\ln t \leq n$, легко получаем, что

$$B_2(t,m) \geq A(m)\, (t/\ln t)^m\, (\ln t/t)^{1/t+1/\ln t}\ .$$

Доказательство соотношения $B_2(t,m) \geq A(m)\ (t/\ln t)^m$ завершается аналогично примеру 2.5.

Замечание 2.3. Построенные примеры означают несколько большее, чем утверждалось в начале параграфа. Они показывают, что даже при рассмотрении подмножества класса симметрических статистик, состоящего из полилинейных форм, верхние константы в соответствующих аналогах неравенств Розенталя для норм растут не медленнее, чем $(t/\ln t)^m$ при $t \to \infty$.

ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ, НЕ СОХРАНЯЮЩИЕ ОТНОШЕНИЕ МАЖОРИРОВАНИЯ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.

3.1 Отношение мажорирования и выпуклые по Шуру функции. Многие математические неравенства можно представить в виде

$$\phi(s/n,s/n,\ldots,s/n) \le \phi(y_1,y_2,\ldots,y_n) \le \phi(s,0,\ldots,0), \tag{3.1}$$

где $s=\sum^n_{i=1}y_i$, $\phi\colon A\to\mathbb{R}$ -некоторая функция, $A\subseteq\mathbb{R}^n$.

Мощным инструментом для доказательства неравенств подобного типа является теория мажоризации, подробно изложенная в книге А. Маршалла и И. Олкина [7].

Пусть $x_{[1]}\ge\ldots\ge x_{[n]}$, $y_{[1]}\ge\ldots\ge y_{[n]}$ - компоненты векторов $x,y\in\mathbb{R}^n$, упорядоченные по невозрастанию. Говорят, что вектор x мажорируется вектором y $(x\prec y)$, если

$$\sum^k_{i=1}x_{[i]} \le \sum^k_{i=1}y_{[i]},\ k=1,\ldots,n-1,$$

$$\sum^n_{i=1}x_{[i]} = \sum^n_{i=1}y_{[i]}.$$

Нетрудно видеть, что

$$(s/n,s/n,\ldots,s/n) \prec (y_1,y_2,\ldots,y_n) \prec (s,0,\ldots,0) \tag{3.2}$$

всякий раз, когда $y_i\ge 0$, $i=1,\ldots,n$, и $\sum^n_{i=1}y_i=s$.

В работе [7] приведены необходимые и достаточные условия, при которых функция ϕ сохраняет упорядочение $\prec$ на A, то есть $(x\prec y)\Rightarrow(\phi(x)\le\phi(y))$ для всех $x,y\in A$. Из (3.2) следует, что при этих условиях справедливы неравенства (3.1), если только $(s/n,s/n,\ldots,s/n)$, $(s,0,\ldots,0)\in A$.

Существует, однако, ряд функций ϕ, не сохраняющих упорядочение $\prec$, для которых имеют место неравенства (3.1). Такова, например, функция

$$\phi(y_1,y_2,y_3) = 4y_1^3 + 4y_2^3 + 4y_3^3 + 15y_1y_2y_3.$$

Действительно, для всех неотрицательных y_1, y_2, y_3, таких, что $y_1+y_2+y_3=s$, имеет место

$$\phi(s/3,s/3,s/3) \le \phi(y_1,y_2,y_3) \le \phi(s,0,0),$$

однако, как легко проверить, ϕ не сохраняет упорядочение $\prec$ на множестве $A=\{y\in\mathbb{R}^3\colon y_1,y_2,y_3\ge 0,\ y_1+y_2+y_3=s\}$.

Настоящая глава содержит некоторые методы доказательства неравенств типа (3.1) для широкого класса функций, не сохраняющих упорядочение $\prec$, и их приложения. Полученные результаты обобщают результаты работы [7].

3.2. О точках экстремума одного класса функций, заданных на симплексе.

Пусть $s>0$, $n\geq 2$, $A_n=\{x\in \mathbb{R}^n: \sum^n_{i=1}x_i=s,\ x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,n\}$, $L_n=\{(s,0,\ldots,0),\ (s/2,s/2,0,\ldots,0),\ldots,(s/(n-1),\ldots,s/(n-1),0),\ (s/n,\ldots,s/n)\}$, $\mathcal{P}_n$ - множество матриц перестановок размера $n\times n$.

Определение 3.1 [7]. Функция ϕ: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ называется симметрической, если $\phi(xP)=\phi(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и $P\in\mathcal{P}_n$.

Следующая теорема позволяет свести задачу нахождения экстремумов широкого класса симметрических функций, заданных на A_n, к сравнению значений этих функций в точках множества L_n .

Теорема 3.1. Пусть ϕ: $A_n\to\mathbb{R}$ - симметрическая функция, удовлетворяющая условию:

$$\max_{x_1\in[o,t]} \phi(x_1,t-x_1,x_3,\ldots,x_n) = \max\,(\phi(t,0,x_3,\ldots,x_n),\phi(t/2,t/2,x_3,\ldots,x_n)) \tag{3.3}$$

при всех фиксированных значениях переменных $t,x_3,\ldots,x_n \geq 0$, таких, что $t+\sum^n_{i=3}x_i=s$. Тогда

$$\max_{x\in A_n} \phi(x) = \max_{x\in L_n} \phi(x), \tag{3.4}$$

$$\min_{x\in A_n} \phi(x) = \min_{x\in L_n} \phi(x). \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. Нетрудно понять, что условие (3.3) можно переформулировать следующим образом: пусть ℓ - отрезок, лежащий в A_n, с концами на границе A_n, параллельный координатной плоскости Ox_1x_2. Тогда наибольшее значение $\phi(x)$ на ℓ достигается либо в середине ℓ , либо на его конце.

Доказательство теоремы 1. Пусть $A^o_n=A_n$, A^m_n - проекция симплекса A_n на гиперплоскость $x_m = 0$. Обозначим через L^m_{ij} множество всех отрезков, лежащих в A^m_n, с концами на границе A^m_n, параллельных координатной плоскости Ox_ix_j, $m = 0,\dots,n$, $i,j = 1,\dots,n$, $i \neq j$. Для отрезка $\ell \subset \mathbb{R}^n$ с концами a, b положим $M(\ell) = \{a, b, (a+b)/2\}$. Через D^m_n, $m = 0,\dots,n$, будем обозначать множества

$$D^m_n = \bigcup_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i\neq j}} \bigcup_{\ell \in L^m_{ij}} M(\ell).$$

Из симметричности функции $\phi(x)$, условия (3.3) с учетом замечания 3.1 имеем, что

$$\max_{x\in A_n} \phi(x) = \max_{x \in D^o_n} \phi(x).$$

Покажем, что

$$D^o_n = \{xP: x \in L_n, P \in \mathcal{P}_n\}. \tag{3.6}$$

Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ представление (3.6) очевидно. Пусть $n = k > 2$ и (3.6) имеет место для $n = k-1$. Нетрудно заметить, что

$$D^o_k = \bigcup_{m=1}^{k} D^m_k \cup \{1/k,\dots,1/k\}. \tag{3.7}$$

Из представления $A^m_k = \{x \in \mathbb{R}^k: \sum^n_{\substack{i=1 \\ i\neq m}} x_i = s,\ x_m = 0\}$ и предположения индукции имеем, что

$$D^m_k = \{(y_1,\dots,y_{m-1},0,y_{m+1},\dots,y_k): (y_1,\dots,y_{m-1},y_{m+1},\dots,y_k) = xP,\ x \in L_{k-1}, P \in \mathcal{P}_{k-1}\} \tag{3.8}$$

Объединяя (3.7) и (3.8), получаем (3.6) при $n = k$. По принципу математической индукции (3.6) доказано. Таким образом,

$$\max_{x\in A_n} \phi(x) = \max_{\substack{x\in L_n \\ P \in \mathcal{P}_n}} \phi(x).$$

Отсюда, используя симметричность функции ϕ, получаем (3.4). Соотношение (3.5) доказывается путем рассмотрения функции $-\phi$. Теорема 3.1 доказана.

Из теоремы 3.1 очевидным образом вытекают следующие следствия 3.1 и 3.2.

Следствие 3.1. Пусть $\phi\colon A_n \to \mathbb{R}$ - симметрическая функция, такая, что функция $\psi(x_1)=\phi(x_1,t-x_1,x_3,\ldots,x_n)$ монотонна по x_1 на отрезке $t/2 \le x_1 \le t$ при всех фиксированных значениях переменных $t,x_3,\ldots,x_n \ge 0$, удовлетворяющих условию $t+\sum^n_{i=3}x_i=s$. Тогда для ϕ справедливы соотношения (3.4) и (3.5).

Замечание 3.2. Как показано в [7, стр.64], монотонное неубывание функции $\psi(x_1)$ и симметричность ϕ являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы ϕ сохраняла упорядочение $\prec$ на A_n.

Следствие 3.2. Пусть $\phi\colon A_n \to \mathbb{R}$ - симметрическая функция, непрерывная на A_n и непрерывно дифференцируемая внутри A_n. Положим $\phi_{(k)}(x)=\partial\phi/\partial x_k(x)$. Если функция

$$\phi_{(1)}(x_1,x_2,x^o_3,\ldots,x^o_n) - \phi_{(2)}(x_1,x_2,x^o_3,\ldots,x^o_n)$$

сохраняет знак в области $x_1 \ge x_2$, $x_1+x_2+\sum^n_{i=3}x^o_i=s$ при всех фиксированных значениях $x^o_3,\ldots,x^o_n \ge 0$, таких, что $\sum^n_{i=3}x^o_i \le s$, то для функции ϕ справедливы соотношения (3.4) и (3.5).

Следствие 3.2 позволяет получить простые доказательства ряда новых алгебраических неравенств. Имеет место следующее

Следствие 3.3. Пусть $n \ge 2$. Для неотрицательных $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$, таких, что $\sum^n_{i=1}x_i=1$, и $c\in\mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\min\left(1/(n-1)^2, 1/n^2+c/n^n\right) \le \sum^n_{i=1}x^3_i+c\prod^n_{i=1}x_i \le \max\left(1, 1/n^2+c/n^n\right), \qquad (3.9)$$

$$\min\left(1/(n-1), 1/n+c/n^n\right) \le \sum^n_{i=1}x^2_i+c\prod^n_{i=1}x_i \le \max\left(1, 1/n+c/n^n\right). \qquad (3.10)$$

Доказательство. Пусть $\phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum^n_{i=1}x^3_i+c\prod^n_{i=1}x_i$. Тогда

$$\phi_{(1)}(x_1,x_2,x^o_3,\ldots,x^o_n)-\phi_{(2)}(x_1,x_2,x^o_3,\ldots,x^o_n) = (x_1-x_2)\left(3\left(1-\sum^n_{i=3}x^o_i\right)-c\prod^n_{i=3}x^o_i\right)$$

в области $x_1+x_2+\sum^n_{i=3}x^o_i=1$. Применяя следствие 3.2, получаем неравенство (3.9). Неравенство (3.10) доказывается аналогично. Следствие 3.3 доказано.

3.3. Характеризация функций, сохраняющих одно векторное упорядочение.

Соотношение (3.2) означает, что векторы $(s/n,s/n,\dots,s/n)$ и $(s,0,\dots,0)$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами по упорядочению $\prec$ на симплексе $A_n=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \sum^n_{i=1}x_i=s,\ x_i\geq 0,\ i=1,\dots,n\}$. Однако, на A_n можно задать и другие упорядочения $\preceq$, для которых

$$(s/n,s/n,\dots,s/n)\preceq(y_1,y_2,\dots,y_n)\preceq(s,0,\dots,0)$$

при всех $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in A_n$. Особый интерес представляют упорядочения, обладающие свойством: $(x\preceq y)\Rightarrow(x\prec y)$ для всех $x,y\in A_n$, так как класс функций, их сохраняющих, шире класса функций, сохраняющих упорядочение $\prec$. Здесь мы приведем одно такое упорядочение и характеризацию функций, его сохраняющих.

Определение 3.2. Пусть $x,y\in\mathbb{R}^n$. Будем полагать $x\preceq^1 y$, если разность $y_{[i]}-x_{[i]}$ не возрастает по $i=1,\dots,n$ и $\sum^n_{i=1}x_i=\sum^n_{i=1}y_i$.

Замечание 3.3. Как показано в [7, стр. 138], $(x\preceq^1 y)\Rightarrow(x\prec y)$ для всех $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Замечание 3.4. Пусть $A\subseteq\mathbb{R}^n$ - симметричное множество, то есть из отношения $x\in A$ следует, что $xP\in A$ для всех $P\in\mathcal{P}_n$. Упорядочение $\preceq^1$ на A обладает, очевидно, тем свойством, что $x\preceq^1 xP\preceq^1 x$ для всех $x\in A$ и $P\in\mathcal{P}_n$. Поэтому, если функция ϕ сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на симметричном множестве A, то она симметрическая на A. Таким образом, если функция ϕ - симметрическая на симметричном множестве A и сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на множестве $A\cap D$, где $D=\{x_1\geq\dots\geq x_n\}$, то она сохраняет упорядочение $\preceq^1$ и на A.

Замечание 3.5. Пусть $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Отношение $\preceq$ на A называется коническим упорядочением, индуцируемым выпуклым конусом K, если $x\preceq y$ тогда и только тогда, когда $y-x\in K$. Нетрудно видеть, что отношение $\preceq^1$ на множестве $D=\{x_1\geq\dots\geq x_n\}$ является коническим упорядочением. Конус, соответствующий упорядочению $\preceq^1$, имеет вид $K=\{x:\ 0\preceq^1 x\}=\{x:\ xM\geq 0\}$, где

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \dots & 0 & 1\\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1\\ \dots & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Учитывая замечание 3.4, достаточно ограничится характеризацией функций, сохраняющих упорядочение $\preceq^1$ на множестве D. Пусть $\{e_i\}^n_{i=1}$ - система единичных ортов в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2. Пусть $\phi\colon D \to \mathbb{R}$ - непрерывная на границе D функция, удовлетворяющая условиям:

$$\phi(\textstyle\sum^k_{i=1}(x_i+\lambda(n-k))e_i+\sum^n_{i=k+1}(x_i-\lambda k)e_i) \geq \phi(x),\ k=1,n-1,$$

$$\phi(x_1+\lambda,\ldots,x_n+\lambda) \geq \phi(x)$$

для всех $\lambda>0$, $x\in D$ таких, что $\sum^k_{i=1}(x_i+\lambda(n-k))e_i+\sum^n_{i=k+1}(x_i-\lambda k)e_i \in D$. Тогда ϕ сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на D.

Для доказательства теоремы 3.2 нам понадобится следующая

Лемма 3.1 [40]. Пусть выпуклый конус $K\subseteq\mathbb{R}^n$ положительно натянут на множество $F\subseteq K$, то есть каждую точку конуса K можно представить в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами конечного числа точек, принадлежащих F. Если A - выпуклое множество с непустой внутренностью, то функция ϕ сохраняет коническое упорядочение, индуцируемое конусом K, на множестве A всякий раз, когда ϕ непрерывна на границе множества A и $\phi(x+\lambda t)-\phi(x)\geq 0$ для всех $\lambda>0$ и $t\in F$ таких, что $x+\lambda t \in A$.

Доказательство теоремы 3.2. Нетрудно показать [7, стр. 431], что если выпуклый конус K имеет вид $K=\{x\colon xM'\geq 0\}$, где $M'\in\mathbb{R}^{n\times n}$ - некоторая невырожденная матрица, то конус K положительно натянут на множество векторов, образованное строками матрицы M'^{-1}. Учитывая, что для матрицы M из замечания 3.5 обратная матрица имеет вид

$$M^{-1} = (1/n) \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ n-2 & n-2 & -2 & \ldots & -2 & -2 \\ n-3 & n-3 & n-3 & \ldots & -3 & -3 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & -(n-1) \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

из леммы 3.1 получаем утверждение теоремы 3.2.

Теорема 3.3. Пусть функция ϕ непрерывна на D и непрерывно дифференцируема внутри D, $\phi_{(k)}(x)=\partial\phi/\partial x_k(x)$. Функция ϕ сохраняет упорядочение $\preceq^1$ на D тогда и только тогда, когда

$$(n-k)\sum^k_{i=1}\phi_{(i)}(x) \geq k\sum^n_{i=k+1}\phi_{(i)}(x),\ k=1,\dots,n-1,$$

$$\sum^n_{i=1}\phi_{(i)}(x) \geq 0$$

для всех $x \in D$.

Доказательство. Теорема 3.3 очевидным образом следует из замечания 5 и следующей леммы.

Лемма 2 [7, стр.431]. Пусть функция ϕ непрерывна на множестве $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и в каждой точке A существует градиент $\nabla\phi(x)=(\partial\phi/\partial x_1,\dots,\partial\phi/\partial x_n)$, $\preceq$ - упорядочение на A, индуцируемое выпуклым конусом K, положительно натянутым на множество F. Функция ϕ сохраняет упорядочение $\preceq$ на A тогда и только тогда, когда $\nabla\phi(x)t \geq 0$ для всех $t \in F$ и любой точки x из внутренности множества A.

ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Здесь мы приведем формулировки ряда проблем, решение которых нам неизвестно.

Проблема 1. Чему равны супремумы и инфимумы в теоремах 1.9-1.11 в оставшихся случаях взаимного расположения t и s ? Например, чему равно выражение $\sup\limits_{(\xi,n)\in M_{11}(n,s,t,a,b,\mathbb{R})} ES_n{}^t$ при $1<t<2$, $t\text{-}1<s<1$ и $t\geq 2$, $1<s<t\text{-}1$?

Проблема 2. Справедлив ли следующий аналог соотношения (1.40), дающий точную нижнюю грань в неравенстве Розенталя для независимых симметрично распределенных с.в. с конечным t-м моментом $(2<t<\mathbb{R})$:

$$\inf_{(\xi,n)\in U_{23}(2,t,A,D_2,\mathbb{R})} E|S_n|^t = \max(A,\ D_2^t)\ ?$$

Проблема 3. Чему равна точная константа $B^*(t)$ в неравенстве Розенталя

$$E|S_n|^t \leq B(t)\ M(2,t,n,\xi)$$

для независимых симметрично распределенных H-значных с.в. $\xi_1,\dots,\xi_n$ с конечным t-м моментом в случае $2<t<3$? (см. замечание 1.14)

Проблема 4. Доказать или опровергнуть гипотезы, выдвинутые в замечании 1.13 и параграфе 2.7.

Проблема 5. Справедлива ли нижняя оценка, даваемая аналогом неравенства Марцинкевича-Зигмунда для симметрических статистик (см. теорему 2.9) в случае $1\leq t<2$?

Проблема 6. Как указывалось в замечании 1.15, при $m\in\mathbb{N}$ $(B^*(2m))^{2m}=Q_{2m}$, где Q_{2m} - число разбиений множества, состоящего из $2m$ элементов на части, мощности которых суть четные числа (это тождество можно доказать, опираясь лишь на результаты работ [10], [12]). Из результатов, полученных в главе 1, можно легко получить, что аналитическое продолжение $f(z)$ функции $f(2m)=Q_{2m}$, $m\in\mathbb{N}$ на комплексную плоскость при вещественных значениях z необходимо принимает значения

$$B^*(t) = (1 + 2^{t/2}\Gamma((t+1)/2)/\pi^{1/2})^{1/t}, \quad 2<t<4,$$

$$B^*(t) = \|\theta_1 - \theta_2\|_t, \quad t\geq 4,$$

где $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, θ_1, θ_2 - независимые пуассоновские с.в. с параметром $0,5$.

В связи с этим интересно было бы доказать теорему 1.13, используя лишь методы теории функций комплексного переменного. Для этого достаточно доказать только что сформулированное утверждение методами комплексного анализа.

Может быть, такое доказательство пролило бы больше света на до конца не ясную "физическую" природу того факта, что $B^*(t)$ описывается разными функциями при $2<t<4$ и $t\geq 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Алешкявичене, А. Л., Боровских Ю. Б. (1995). О вероятностях больших уклонений для *UH*-статистик. *Лит. Матем. Журн.*, т. 35, в. 2, с. 141-151.

[2] Де Брейн, Н. Г. (1961). *Асимптотические методы в анализе.* М.: Изд-во иностр. литер., 248 с.

[3] Егоров, В. А., Невзоров, В. Б. (1975). О скорости сходимости линейных комбинаций абсолютных порядковых статистик. *Теория вероятн. и ее примен.*, т. XX, в. 1, с. 207-215.

[4] Золотарев, В. М. (1986). *Современная теория суммирования независимых случайных величин.* М.: Наука, 416 с.

[5] Королюк, В. С., Боровских, Ю. В. (1988). *Мартингальная аппроксимация.* Киев: Наук. думка, 248 с.

[6] Королюк, В. С., Боровских, Ю. В. (1989). *Теория U-статистик.* Киев: Наукова Думка, 384 с.

[7] Маршалл, А., Олкин, И. (1983). *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения.* М.: Мир, 576 с.

[8] Нагаев, С. В., Пинелис, И. Ф. (1977). Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее примен.*, т. XXII, в. 2, с. 254-263.

[9] Пинелис, И. Ф. (1980). Оценки моментов бесконечномерных мартингалов. *Матем. заметки*, т. 27, N 6, с. 953-958.

[10] Пинелис, И. Ф., Утев, С. А. (1984). Оценки моментов независимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее примен.*, т. XXIX, в. 3, с. 554-557.

[11] Пинелис, И. Ф., Утев, С. А. (1989). Точные экспоненциальные оценки для сумм независимых случайных величин. *Теория вероятн. и ее примен.*, т. XXXIV, в. 2, с. 384-390.

[12] Прохоров, Ю. В. (1962). Экстремальные задачи в предельных теоремах. В кн.: *Труды VI Всесоюзн. совещания по теории вероятн. и матем. статистике.* Вильнюс, с. 77-84.

[13] Сазонов, В. В. (1974). К оценке моментов сумм независимых случайных величин.

Теория вероятн. и ее примен., т. XIX, в. 2, с. 383-386.

[14] Сачков, В. Н. (1977). *Комбинаторные методы дискретной математики.* М.: Наука., 320 с.

[15] Утев, С. А. (1985). Экстремальные задачи в моментных неравенствах. В сб. *Пред. теоремы теории вероятн. (Труды Инст. матем. СО АН СССР, т. 5)*, Нов.: Наука, с. 56-75.

[16] Шарахметов Ш. (1995). Оценки для моментов симметрических статистик. *Тезисы IV Ферганской конференции по теории вероятностей и математической статистике.* Ташкент, с. 119.

[17] Шарахметов Ш. (1996). Неравенства Хинчина и Розенталя для симметрических статистик. Принято в печать в *Лит. Матем. Журн.*

[18] Aleskeviciene, A. K. (1992). Large deviations for *U*-statistics. *Lithuanian Math. J.*, V. 32, N 1, p. 4-14.

[19] Bahr, B. von, Esseen, C.-G. (1965). Inequalities for the rth absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. *Ann. Math. Statist.*, V. 36, N 1, p. 299-303.

[20] Bickel, P. J., Gotze, F., Zwet, W. R. von (1986). The Edgeworth expansion for *U*-statistics to degree two. *Ann. Statist.*, V. 14, N 4, p. 1463-1484.

[21] Bonami, A. (1970). Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L_p(G)$. *Ann. Inst. Fourier*, V. 20, p. 335-402.

[22] Cambanis, S., Rosinski, J. and Woyczynski, W. A. (1985). Convergence of quadratic forms in p-stable random variables and θ_p-radonifying operators. *Ann. Probab.*, V. 13, p. 885-897.

[23] Daley, D.J. (1977). Tighter bounds for the absolute third moments. *Scand.J.Statist.*, V. 4, p. 183-184.

[24] Dalton, H. (1920). The measurement of the inequality of incomes. *Econom. J.*, V. 30, p. 348-361.

[25] Eaton, M.L. (1970). A note on symmetric Bernoulli random variables. *Ann. Math. Statist.*, V. 41, 1223-1226.

[26] Eaton, M. (1974). A Probability Inequality for Linear Combinations of Bounded Random Variables. *Ann. Statist.*, V. 2, p. 609-613.

[27] Esseen, C.-G. (1975). Bounds for the absolute third moments. *Scand.J.Statist.* V. 2, p. 149-152.

[28] Gini, C. (1912). *Variabilitae Mutabilita.* Anno 3, Part 2. Studi Economico-Giuridici della R. Universita de Cagriari, 80 p.

[29] Haagerup, U. (1982). The best constants in the Khintchine inequality. *Studia Math.*, V. 70, p. 232-283.

[30] Hitczenko P. (1990). Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality. *Ann. Probab.*, V. 18, p. 1656-1668 .

[31] Hoeffding, W. (1955). The extrema of the expected value of a function of independent random variables. *Ann. Math Statist.*, V. 26, p. 268-276.

[32] Hoeffding, W. (1956). On the distribution of the number of successes in independent trials. *Ann. Math. Stat.*, V. 27, p. 713-721.

[33] Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J. (1985). Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables. *Ann. Probab.*, V. 13, N 1, p. 234-253.

[34] Karlin S. and A. Novikoff (1963). Generalized convex inequalities. *Pacific J. Math.*, V. 13, p. 1251-1279.

[35] Karr A. A. (1983). Extreme points of certain sets of probability measures, with applications. *Math. Operat. Res.*, V. 8, p. 74-85.

[36] Khintchine, A. (1923). Uber dyadische Bruche. *Math. Z.* , V. 18, p. 109-116.

[37] Krakowiak, W., Szulga, J. (1986). Random multilinear forms. *Ann. Probab.*, V. 14, N 3, p. 955-973.

[38] Lorenz, M. O. (1905). Methods of measuring concentration of wealth. *J. Amer. Statist. Assoc.*, V. 9, p. 209-219.

[39] Marcinkiewicz, J., Zigmund, A. (1937). Sur les fonction independantes. *Fund. Math.*, V. 29, p. 60-90.

[40] Marshall, A.W., D.W. Walkup, and R.J.-B. Wets (1967). Order - preserving functions: applications to majorization and order statistics. *Pacific J. Math.*, V. 23, p. 569-584.

[41] McConnell, T.R., Taqqu, M. (1986). Decoupling inequalities for multilinear forms in independent symmetric random variables. *Ann. Probab.*, V. 14, N 3, p. 943-954.

[42] Pigou, A. C. (1912). Wealth and Welfare. Macmillan, New York.

[43] Rosenthal, H.P. (1970). On the subspaces of L^p $(p>2)$ spanned by sequences of independent random variables. *Israel J. Math.*, V. 8, N 3, p. 273-303.

[44] Rosinski, J. and Szulga, J. (1982). Product random measures and double stochastic integrals. *Lecture Notes in Math.*, V. 939, p. 181-199. Springer, Berlin.

[45] Rosinski, J. and Woyczynski, W.A. (1984). Products of random measures, multilinear forms and multiple stochastic integrals. *Lecture Notes in Math.*, V. 1089, Springer, Berlin.

[46] Rosinski, J. and Woyczynski, W.A. (1986). On Ito stochastic integration with respect to p-stable motion: Inner clock, integrability of sample paths, double and multiple integrals. *Ann. Probab.*, V. 14, p. 271-286.

[47] Sen, A. (1973). *On Economic Inequality*. Oxford Univ. Press (Clarendon), London and New York.

[48] Serfling, R.J. (1980). *Approximation. Theorems of Mathematical Statistics.* New York: Wiley, 371 p.

[49] Simpson, E. H. (1949). Measurement of diversity. *Nature*, V. 163, p. 688.

[50] Sjorgen, P. (1982). On the convergence of bilinear and quadratic forms in independent random variables. *Studia Math.*, V. 71, p. 285-296.

[51] Szal, R. and Robinson, S. (1977). Measuring income inequality. In Income Distribution and Growth in the Less-Developed Countries (C. R. Frank, Jr. and R. C. Webb, eds.), p. 491-533. Brookings Inst., Washington, D. C.