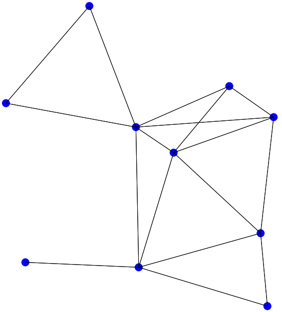
Algoritmos de Localización por medidas de Potencia

Javier Zazo

17 Junio 2013

Gráfico de la Red

- Problema de localización de un objetivo (Target) $\rightarrow$ Problema estacionario
- Problema de seguimiento (Tracking) $\rightarrow$ Problema NO estacionario
- Red de nodos: cada uno realiza sus propias mediciones
- Comparten información y colaboran entre sí con sus vecinos
- Realizan medidas independientes



Received Signal Strength (I)

- Localización mediante medidas de POTENCIA
  - **Received Signal Strength** (RSS)
- Indicador RSS: disponible en todos los dispositivos wireless
  - No requiere coste añadido, ni mayor gasto energético o espacio.
- Distancia a partir del modelo de Friis
  - Modelo de transmisión en espacio libre

$$P_r(d) = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2}$$

donde λ es longitud de onda.

Received Signal Strength (II)

- Modelo empírico

$$P_r(d)[dBm] = P_0 - 10n_p \log_{10}\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_\sigma$$

donde X_σ es v.a. gausiana de media nula, y varianza σ.

- Medida de distancia

$$d = d_0 \cdot 10^{-\frac{P_r(d)-P_0(d_0)}{10n_p}} \cdot 10^{\frac{X_\sigma}{10n_p}}$$

  - El error de distancia no es aditivo, sino multiplicativo.

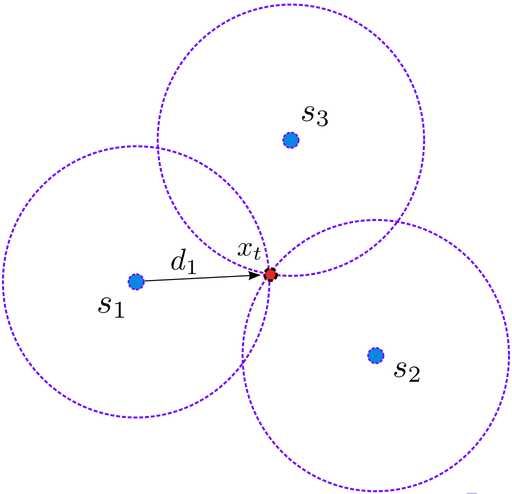
- Medidas de Máxima Verosimilitud (ML)

$$d = d_0 \cdot 10^{-\frac{P_r(d)-P_0(d_0)}{10n_p}}$$

Sistema de ecuaciones

- Solución por triangulación

$$d_i = \|x_t - s_i\|, \qquad \forall l \in \mathcal{N}$$



Comparamos dos estimadores

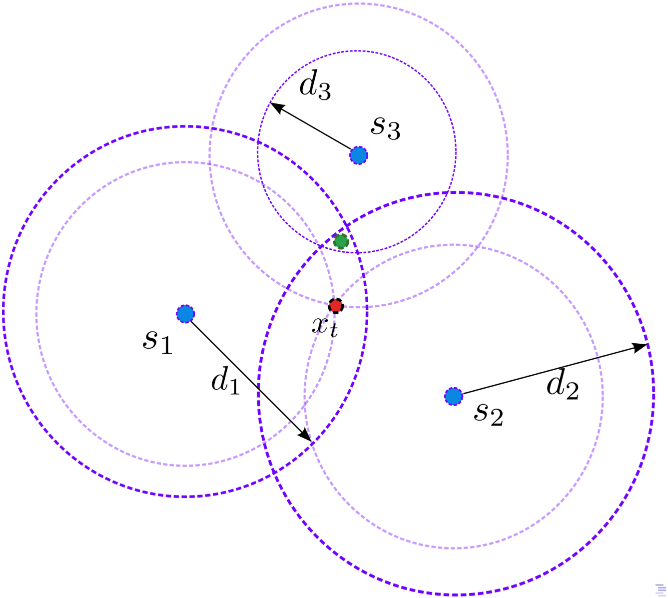
- Primer estimador: Range Least Squares

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \sum_{i} \left(d_i - \|x - s_i\|\right)^2$$

- Segundo estimador: Squared Range Least Squares

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \sum_{i} \left(d_i^2 - \|x - s_i\|^2\right)^2$$

Gráficamente



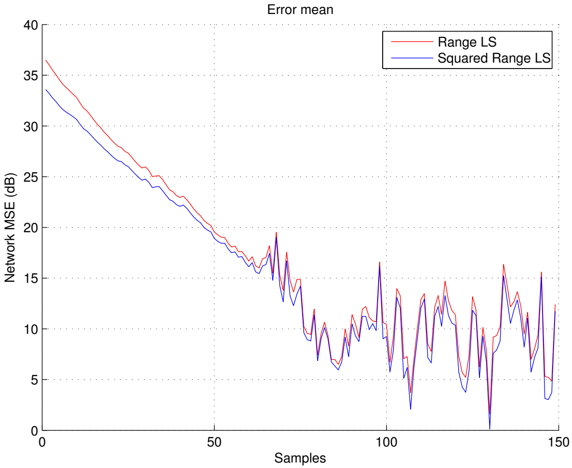
Primera solución

- Podemos intentar resolver los problemas anteriores por **descenso de gradiente**

$$x(k+1) = x(k) - \alpha \nabla_x J(x(k))$$

- No obstante, siendo ambas funciones no convexas, el algoritmo puede anclarse en mínimos locales.
- En la siguiente simulación:
  - Mundo X=[-100 100], Y=[-100 100]
  - Target $x_t = [50, 50]^T$
  - $\sigma = 1$
  - Paso de adaptación $\mu = 0.0001$
  - Conectividad de los nodos variable
  - Número de simulaciones = 500

Descenso de gradiente



Solución óptima a SRLS

$$\hat{x} = \arg\min_x \sum_i \left(d_i^2 - \|x - s_i\|^2\right)^2$$

- Transformamos el problema a un Quadratic Problem (QP) con Quadratic Constraint (QC)

$$\min_x \sum_i \left(k - 2s_i^\top x + \|s_i\|^2 - d_i^2\right)^2$$
$$\text{s.t. } \|x\|^2 = k$$

$$\min_{y \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n+1}}} \|Ay - b\|^2$$
$$\text{s.t.} y^\top Dy + 2f^\top y = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -2s_1^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -2s_N^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} d_1^2 - \|s_1\|^2 \\ \vdots \\ d_N^2 - \|s_N\|^2 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times n} & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Solución Non-Convex

- Aplicamos la teoría de Generalized Trust Region Subproblems (GTRS) para encontrar la solución óptima
- Lagrangiano y condiciones KKT

$$L = (Ay - b)^\top (Ay - b) + \lambda \left(y^\top D y + 2 f^\top y \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= \left(A^\top A + \lambda D \right) y - A^\top b - \lambda f = 0 \\ & y^\top D y + 2 f^\top y = 0 \\ & A^\top A + \lambda D \succeq 0 \end{aligned}$$

Solución Non-Convex

- Definimos
$$\varphi(\lambda) \equiv \hat{y}^\top D\hat{y} + 2f^\top \hat{y}$$
y buscamos la raíz de dicha ecuación tal que
$$\varphi(\lambda) = 0$$
siendo
$$\hat{y} = \left(A^\top A + \lambda D\right)^{-1} \left(A^\top b - \lambda f\right)$$
- Intervalo de búsqueda
$$I = \left(-\frac{1}{\mathrm{eig}_1\left(D, A^\top A\right)}, \infty\right)$$

Weigthed Least Squares

$$
\begin{aligned}
d_i^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \\
d_i^2 - d_1^2 &= x_i^2 + y_i^2 - 2xx_i - 2yy_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2x_2 & 2y_2 \\ \vdots & \vdots \\ 2x_N & 2y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 + y_2^2 + d_1^2 - d_2^2 \\ \vdots \\ x_N^2 + y_{iN}^2 + d_1^2 - d_N^2 \end{bmatrix}
$$

$$
Hx = b
$$

- ¿Cuál es la pérdida de rendimiento por usar éste algoritmo?

Weigthed Least Squares

$$\hat{x} = \left(H^{\top}\Gamma^{-1}H\right)^{-1} H^{-\top}\Gamma^{-1}b$$

donde Γ es la matriz de covarianzas de b.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) + \mathrm{Var}\left(d_2^2\right) & \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) & \cdots & \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) \\ \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) & \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) + \mathrm{Var}\left(d_3^2\right) & \cdots & \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) & \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) & \cdots & \mathrm{Var}\left(d_1^2\right) + \mathrm{Var}\left(d_N^2\right) \end{bmatrix}$$

Alternative BLUE

- Descomponemos igual que antes en

$$Ax = b$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -2s_1^\top & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -2s_N^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} d_1^2 - k_1 \\ \vdots \\ d_N^2 - k_N \end{bmatrix}$$

pero, relajamos la restricción

$$\|x\|^2 = k$$

- Calculamos la matriz de covarianzas de esta expresión, y resolvemos el LS igual que antes:

$$\hat{x} = \left(H^\top \Gamma^{-1} H\right)^{-1} H^{-\top} \Gamma^{-1} b$$

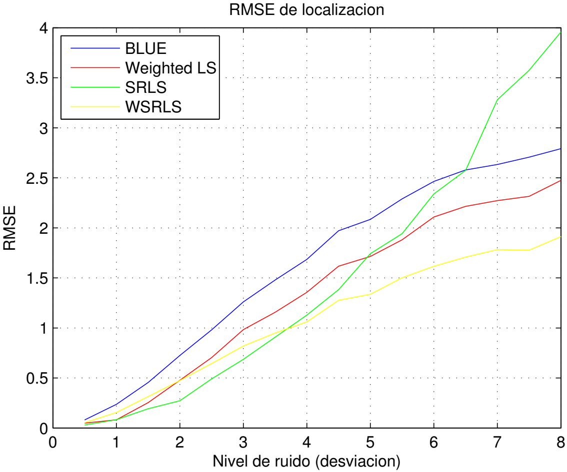
Solución Weighted Non-Convex

- El anterior modelo da el mismo peso a todas las muestras
- Dado el modelo de canal que estamos usando, a mayor distancia, mayor ruido.
- Por tanto, reformulamos el estimador a

$$\min_{y \in \mathbb{R}^{n+1}} \Gamma \left\| Ay - b \right\|^2$$
$$\text{s.t.} y^\top D y + 2 f^\top y = 0$$

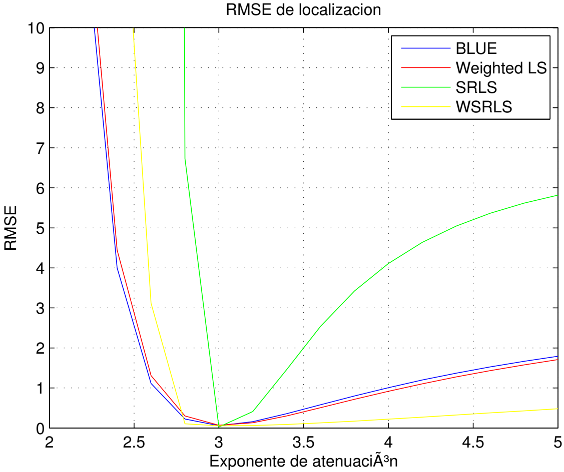
Rendimientos en función del ruido

1000 simulaciones



Rendimientos en función del exponente de atenuación

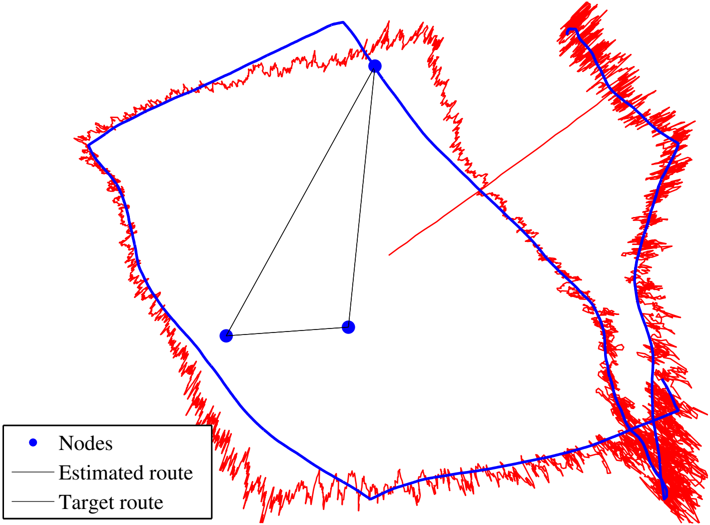
100 simulaciones



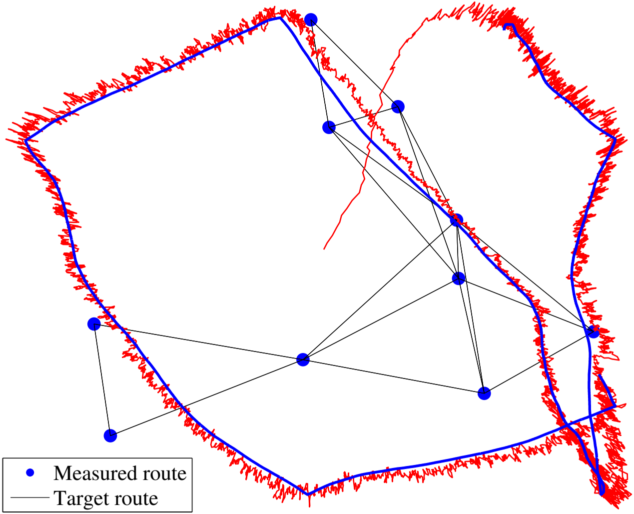
Tracking

- Mundo X=[-100 100], Y=[-100 100]
- Target movimiento aleatorio, $\sigma_a = 0.1$
- Error de las medidas $\sigma_x = 1$
- Paso de adaptación $\mu = 0.000005$
- Conectividad de los nodos variable

Tracking I: 3 nodos



Tracking II: 10 nodos



Tracking III: 20 nodos