文章编号: 0583-1431(2017)01-0081-16 **文献标识码: A**

非交换傅立叶变换

刘正伟

哈佛大学数学及物理学院 剑桥 02138
E-mail: zhengweiliu@fas.harvard.edu

吴劲松

中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026
E-mail: wjsl@ustc.edu.cn

献给李炳仁研究员 75 华诞

摘　要　这是最近子因子和局部紧量子群上的非交换傅立叶变换的一系列工作的综述. 简要地介绍子因子和局部紧量子群的定义及其性质, 给出了 Hausdorff–Young 不等式, Young 不等式, 不确定原理, 合集估计以及它们的等号成立条件.

关键词　子因子; 平面代数; 傅立叶变换; 双投影的双平移
MR(2010) 主题分类　46L37, 43A30, 81R50
中图分类　O177.1

The Noncommutative Fourier Transform

Zheng Wei LIU

Department of Mathematics and Department of Physics,
Harvard University Cambridge, Cambridge 02138*, U. S. A.*
E-mail: *zhengweiliu@fas.harvard.edu*

Jin Song WU

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026*, P. R. China*
E-mail: *wjsl@ustc.edu.cn*

Abstract　We present the recent work on the noncommutative Fourier transform for subfactors and locally compact quantum groups, a Survey. We give a short introduction to subfactors and locally compact quantum groups and their properties; the Hausdorff–Young inequality and its extremal functions; Young's inequality and its extremal pairs; uncertainty principles and its minimizers; a noncommutative sum set theorem.

Keywords　subfactors; planar algebras; fourier transform; bi-shifts of biprojections
MR(2010) Subject Classification　46L37, 43A30, 81R50
Chinese Library Classification　O177.1

收稿日期: 2016-08-16; 接受日期: 2016-10-14
基金项目: 国家自然科学青年基金项目 (11401554)

1 引言

傅立叶在研究热力学方程时首先发现了群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}$ 的对偶关系, 由此引进傅立叶级数 [23]. 后人推广了他的方法来研究交换群及其对偶群的关系. 群到其对偶群的变换被称为傅立叶变换.

1927 年, 海森堡在量子力学研究中发现不确定原理

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

这里 $\hbar$ 是约化普朗克常数, x, p 是粒子的位置和动量, 在傅立叶变换下它们互为对偶. 海森堡不确定原理有相应的严格数学形式 [31], 并且高斯函数满足等号成立条件.

源于数学中的分析理论, 在 1933 年, Hardy 证明了基于 $\mathbb{R}$ 上高斯函数的不确定原理, 称为 Hardy 不确定原理 [26].

1957 年, Hirschman [28] 证明了一个基于 Shannon 熵 H_s 不确定原理, 并且猜想

$$H_s(|f|^2) + H_s(|\hat{f}|^2) \geq \log \frac{\mathrm{e}}{2}, \quad \|f\|_2 = 1, \tag{1.1}$$

这里 f 是 $\mathbb{R}$ 的可测函数, e 是自然对数底. 这个猜想可以直接导出海森堡不确定原理. 1975 年, Beckner 解决了这个猜想 [3], 同时刻画了 $\mathbb{R}^n$ 上 Hausdorff–Young 不等式和 Young 不等式的等号成立条件. 我们称不等式 (1.1) 为 Hirschman–Beckner 不确定原理. 它的等号成立条件由 Özaydm 和 Przebinda 于 2004 年刻画, 等号成立当且仅当 f 是高斯函数 [50].

在信息论方面, 1989 年, Donoho 和 Stark 考虑有限循环群上的不确定原理, 并应用到信息论的信号重构. Candes, Romberg 和 Tao 结合这个想法和随机矩阵的方法, 极大程度推动了压缩感知理论, 并成功应用到信号重构中 [11].

对于局部紧交换群, 傅立叶变换有具体的积分表达式. 在局部紧非交换群上, 群的对偶由其表示论给出, 它们之间的傅立叶变换不再有简单的积分显式表达. 人们可以通过考虑群函数的卷积来研究傅立叶变换部分性质, 然而这时对偶空间上算子的卷积将变得极其复杂.

20 世纪 70 年代, Vainerman, Kac [64–66] 和 Enock, Nest [16–18] 独立地发现了 Kac 代数. Kac 代数推广了局部紧群及其对偶. 进一步, Kustermans 和 Vaes 介绍了局部紧量子群 [41, 42]. 而这一概念推广了 Kac 代数. 局部紧量子群上的傅立叶变换由可乘酉元给出代数表达式.

在 20 世纪 80 年代, Jones 通过研究子因子, 并由此得到扭结不变量, 即为大家熟知的 Jones 多项式. 这个结果极大的推动了数学和物理在量子对称性方面的研究, 也被应用于生物领域的 DNA 识别技术. 在此期间产生了许多数学和物理的新领域. 1988 年, Atiyah 介绍了拓扑量子场论 [2]. 同年, Witten 通过陈 –Simons 作用给出 Jones 多项式的拓扑阐释, 并构造了 3 维拓扑量子场论 [67]. Turaev, Reshetikhin 和 Viro 给出了相应的严格化的数学理论 [54, 56].

子因子理论被广泛的应用于量子对称性的研究中 [22], Jones 通过 Jones 指标刻画量子尺寸, 并给出完整分类 [34]. 需要指出的是, 量子尺寸可以是非整数.

1988 年, Ocneanu 定义了子因子上傅立叶变换 [49]. Jones 结合了扭结理论以及拓扑量子场论的思想, 介绍了平面代数. 在平面代数中傅立叶变换的拓扑意义被解释为平面上的旋转. 局部紧量子群和平面代数上的傅立叶变换都没有分析表达式, 但是平面代数上的傅立叶变换有简单的拓扑表达式. 由于这个原因, 经典的分析方法并不能直接应用到子因子和局部紧量子群上傅立叶分析中. 我们需要新的方法来研究这些傅立叶变换. 平面代数上傅立叶变换的拓扑性质被用于证明数学物理的反射正定性 [29] 以及刻画量子信息理中的极大纠缠态 [30], 通常称为弦傅立叶变换.

在最近的工作中, 我们针对非交换情况给出了一套不同于经典方法的工具, 并用于研究子因子和局部紧量子群上的傅立叶变换, 得到了一系列对应于经典情形的结果.

在文 [31] 中, 蒋春澜和刘正伟给出有限指标子因子上 Hirschman–Beckner 不确定原理, 并刻画其极小值. 基于极小值的刻画, 给出一般形式的 Hardy 不确定原理. 另外, 还给出 Donoho–Stark 不确定原理及其极小值的刻画和非交换的 Hausdorff–Young 不等式, Young 不等式等.

在文 [32] 中, 蒋春澜和刘正伟将可加组合理论 [61] 中的合集估计的想法应用于有限指标子因子, 证明了子因子上的合集估计和合集定理. 结合不确定原理及其等号成立条件, 刻画有限指标子因子上 Young 不等式的等号成立条件, 由此刻画 Hausdorff–Young 不等式等号成立条件.

在文 [44] 中, 王斯萌和本文作者给出了局部紧量子群上的 Young 不等式. 进一步地, 本文作者在文 [45] 刻画了 Kac 代数上的不确定原理的等号成立条件, 并给出一类 Kac 代数的 Hardy 不确定原理. 另外, 我们还将给出这类 Kac 代数上的合集估计和合集定理, 并利用这些结果刻画 Young 不等式等号成立条件, 从而得到 Hausdorff–Young 不等式的等号成立条件.

2 子因子

这一节简要回顾 von Neumann 代数、子因子、平面代数等理论. 更多关于 von Neumann 代数见文 [38, 59], 子因子理论请见文 [37], 关于平面代数请见文 [33]. 最后我们给出子因子上傅立叶变换的拓扑形式.

设 $\mathscr{H}$ 是一个复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是 $\mathscr{H}$ 上全体有界线性算子组成的代数. 给定网 $a_i \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, 如果存在 $a \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, 使得对于任意 $\xi \in \mathscr{H}$, $a_i\xi \to a\xi$ 收敛, 那么称 $a_i \to a$ 依强算子拓扑收敛. 如果 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的一个有单位的 $*$- 子代数且在强算子拓扑下封闭, 那么称 $\mathscr{M}$ 是 von Neumann 代数. 进一步如果 $\mathscr{M}$ 的中心平凡, 那么称 $\mathscr{M}$ 是因子. 如果因子 $\mathscr{M}$ 是无限维的且有迹, 那么称其为 II 型因子. 我们知道 II 型因子 (在相差一个常数意义下) 有唯一的迹, 记作 tr. 如果 tr 是迹态, 称 $\mathscr{M}$ 为 II_1 型因子. 否则 tr 为迹权, 称 $\mathscr{M}$ 为 II_∞ 型因子.

设 $\mathscr{M}$ 是一个作用在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的 von Neumann 代数, 则其有如下双换位定理:

$$\mathscr{M} = (\mathscr{M}')'(= \mathscr{M}''),$$

这里 $\mathscr{M}' = \{x \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \,|\, xa = ax, \forall\, x \in \mathscr{M}\}$. 上述定理也可作为 von Neumann 代数的代数定义.

下面给出一个 II_1 型因子的例子. 设 tr 是 2 维复矩阵 $M_2(\mathbb{C})$ 上的迹态, 那么 $\mathrm{tr}^{\otimes n} := \mathrm{tr} \otimes \cdots \otimes \mathrm{tr}$ 是 $M_2(\mathbb{C})^{\otimes n} := M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})$ 上的迹态. 设 I 是单位矩阵, 那么从 $M_2(\mathbb{C})^{\otimes n}$ 到 $M_2(\mathbb{C})^{\otimes n+1}$ 的嵌入映射 $x \to x \otimes 1$ 保迹不变. 通过取诱导极限, 得到有单位的 $*$- 代数

$$\bigotimes_{n=1}^{\infty} M_2(\mathbb{C}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_2(\mathbb{C})^{\otimes n} \quad \text{以及它的迹态} \quad \tau = \lim_{n\to\infty} \mathrm{tr}^{\otimes n}.$$

通过 Gelfand–Naimark–Segal (GNS) 构造, 得到 Hilbert 空间 $\mathscr{H} = L^2(\bigotimes_{n=1}^{\infty} M_2(\mathbb{C}), \tau)$ 以及 $\bigotimes_{n=1}^{\infty} M_2(\mathbb{C})$ 在 H 上的左作用. 记 $\mathscr{R}$ 为代数 $\bigotimes_{n=1}^{\infty} M_2(\mathbb{C})$ 在 H 上的强算子闭包, 那么 $\mathscr{R}$ 是一个 II_1 型因子. 这个例子被称为超有限 II_1 型因子.

设 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{M}$ 是因子. 如果 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$, 称 $\mathscr{N}$ 为 $\mathscr{M}$ 的子因子, 简称 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 是子因子. 如果 $\mathscr{N}' \cap \mathscr{M} = \mathbb{C}$, 那么称 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 为不可约子因子. 本文只考虑 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{M}$ 都是 II_1 型因子的情况.

2.1 Jones 指标

设 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 是子因子, tr 是它们的迹态. 通过 GNS 构造, 得到一个 Hilbert 空间 $\mathscr{H} = L^2(\mathscr{M})$ 以及 $\mathscr{M}$ 在 H 上的左作用. 同时得到 $\mathscr{H}$ 的 Hilbert 子空间 $L^2(\mathscr{N})$. 记这个子空间上的投影为 $e_{\mathscr{N}}$, 称为 Jones 投影. 设 $\mathscr{M}_1$ 为 $\mathscr{M}$ 和 $e_{\mathscr{N}}$ 在 $\mathscr{H}$ 上生成的 von Neumann 代数, 即 $\mathscr{M}_1 = \{\mathscr{M}, e_{\mathscr{N}}\}''$. 我们知道 $\mathscr{M}_1$ 是 II 型因子, 并且 $e_{\mathscr{N}}$ 是 $\mathscr{M}$ 中的有限投影. 如果 $\mathscr{M}$ 是 II_∞ 型因子, 那么 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 的 Jones 指标定义为 ∞. 如果 $\mathscr{M}$ 是 II_1 型因子, 那么 $\mathscr{M}$ 上的迹态 tr 可以延拓到 $\mathscr{M}_1$ 上. 这时 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 的 Jones 指标定义为 $\frac{1}{\mathrm{tr}(e_{\mathscr{N}})}$, 记作 $[\mathscr{M} : \mathscr{N}]$. Jones 指标是子因子在同构意义下的一个重要的不变量. Jones 著名的指标分类结果指出 Jones 指标可以是非整数.

定理 2.1 (Jones 指标定理 [34]) 设 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 是子因子, 那么

$$[\mathscr{M} : \mathscr{N}] = \left\{ \left(2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 \middle| n = 3, 4, \ldots \right\} \cup [4, \infty].$$

2.2 标准不变量

设 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 是有限指标的子因子, 得到子因子 $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}_1$, 并且

$$[\mathscr{M}_1 : \mathscr{M}] = [\mathscr{M} : \mathscr{N}].$$

这个过程被称为基本构造. 重复基本构造得到一列因子

$$\mathscr{N} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2 \subset \cdots$$

被称为 Jones 塔. 对于 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{M}$ 分别取相对换位子, 得到一个有限维 von Neumann 代数的格

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathscr{N}' \cap \mathscr{N} & \subset & \mathscr{N}' \cap \mathscr{M} & \subset & \mathscr{N}' \cap \mathscr{M}_1 & \subset & \mathscr{N}' \cap \mathscr{M}_2 & \subset & \cdots \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ & & \mathscr{M}' \cap \mathscr{M} & \subset & \mathscr{M}' \cap \mathscr{M}_1 & \subset & \mathscr{M}' \cap \mathscr{M}_2 & \subset & \cdots \end{array}$$

被称为标准不变量. 通常我们把 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{M}$ 考虑成 $\mathscr{M}_{-1}$ 和 $\mathscr{M}_0$.

Popa 的深刻结果指出有限指标的 II_1 型温顺子因子可以通过标准不变量完全区分 [52], 并且给出标准不变量的公理化体系 [53], 称为标准 λ- 格. 后者完善了 Ocneanu 关于有限深度子因子的标准不变量的公理化 [49]. Jones 借鉴扭结理论和拓扑量子场论 (TQFT) 的思想 [2, 67], 给出新的标准不变量的公理化体系, 称为平面代数.

2.3 双模范畴

标准不变量也可以从双模范畴的角度来考虑, 请见文 [48]. 因子 $\mathscr{M}$ 可以左作用或者右作用到 Hilbert 空间 $L^2(\mathscr{M})$ 上, 即 $L^2(\mathscr{M})$ 是一个 $\mathscr{M} - \mathscr{M}$ 双模. 因为 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 是子因子, 所以 $L^2(\mathscr{M})$ 也可以看作 $\mathscr{N} - \mathscr{N}$, $\mathscr{N} - \mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M} - \mathscr{N}$ 双模. 记 X 为 $\mathscr{N} - \mathscr{M}$ 双模 $L^2(\mathscr{M})$, 那么它的对偶 $\overline{X}$ 是 $\mathscr{M} - \mathscr{N}$ 双模 $L^2(\mathscr{M})$, 并且 $X \otimes \overline{X}$ 是 $\mathscr{M} - \mathscr{M}$ 双模 $L^2(\mathscr{M})$. 这里双模的张量积被称为 Connes 融合. Connes 定义并证明了 Connes 融合是双模范畴上的张量函子. 因此双模范畴构成 2- 范畴. 这样 $\mathscr{N} - \mathscr{N}$ 双模和 $\mathscr{M} - \mathscr{M}$ 双模分别构成张量范畴. 子因子也可以看作是两个范畴间的 Morita 等价. 当不可约双模的只有有限个时, 这个张量范畴也被称为酉融合范畴 (unitary fusion category) .

反之, 任何复数域上的酉融合范畴都可以嵌入到超有限因子的双模张量范畴中, 并且, 一个 $\mathscr{N} - \mathscr{N}$ 双模 $\mathscr{M}$ 是酉融合范畴中的 Frobenius 代数当且仅当 $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ 是子因子 [48]. 在共形场论中, 这样的双模被称为量子系统 (quantum system) [46].

Ocneanu 首先指出 Frobenius 代数给出 $\mathscr{N}-\mathscr{N}$ 双模范畴上一个新的乘法结构, 因此得到一个广义 Hopf 代数. 基于这个观点 Ocneanu 定义了 (有限深度) 子因子上的 Fourier 变换 [49]. 在下一节将给出 Fourier 变换在平面代数中简洁的拓扑表示.

2.4 平面代数

设 $\mathscr{N}\subset\mathscr{M}$ 是有限指标的子因子, 在其标准不变量里, 我们总会得到一列 Jones 投影 $e_i\in\mathscr{M}_i$, $i=1,2,\ldots$, 满足

$$e_ie_{i\pm1}e_i=[\mathscr{M}:\mathscr{N}]^{-1}e_i, \tag{2.1}$$

$$e_ie_j=e_je_i,\quad \forall|i-j|\geq 2. \tag{2.2}$$

由这些 e_i 生成的代数被称为 Temperley–Lieb 代数 (注: Temperley–Lieb 代数首先由 Temperley 和 Lieb 于 1971 年在他们统计力学的工作中得到). Kauffman 从扭结的角度给出 Jones 投影的图形表示. Jones 投影 e_i 由图 1 中的平面图表示. 图 1 中凸曲线和凹曲线分别链接下边界和上边界的第 i 个和第 $i+1$ 个端点. 系数 $\delta=\sqrt{[\mathscr{M}:\mathscr{N}]}$ 被称为量子尺寸.

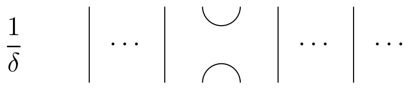


图 1 Jones 投影 e_i

在扭结理论中代数乘法通过上下连接相应图形给出. 一条可收缩的封闭弦可以替换成它的量子尺寸 δ. 这个表示将 Jones 投影的代数关系转化成弦的同痕类. Jones 进一步通过 Jones 投影的代数关系得到杨 –Baxter 方程的解以及辫群的表示. 这些代数关系可以转化成 3 维空间中弦的同痕类, 由此得到 3 维空间的扭结不变量, 即为大家熟知的 Jones 多项式 [34].

Jones 介绍平面代数, 并由此给出标准不变量的拓扑阐释. 在平面代数中, 标准不变量的代数关系传化成平面上弦的同痕类以及弦的作用. 在此简单的回顾平面代数的定义, 详情见文 [33].

平面上弦的作用由平面纠缠的作用给出. 我们在图 2 中给出一个平面纠缠的例子. 平面纠缠包含一个复平面上的圆盘 (可以看作输出端). 其内部有有限个互不相交的圆盘 (每个内部圆盘可以看作一个输入端). 每个圆盘的边界上有偶数个标记点. 每个圆盘的边界被标记点分成若干连通分支, 其中有一个被 \$ 标记, 并以此来确定平面纠缠复合时拼接的位置. 在内外圆盘之间的区域有有限条互不相交的光滑曲线, 称为弦. 这些弦或者封闭, 或者与圆盘横截相交于圆盘上的标记点. 内外圆盘之间被弦分成的连通区域被黑白交替染色.

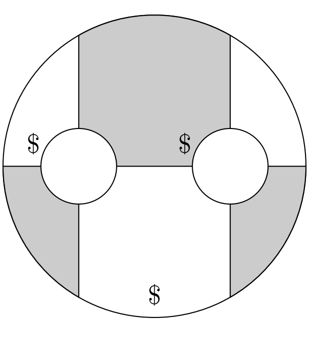


图 2 平面纠缠

平面纠缠的边界条件由其边界的每一个连通分支上端点个数以及 \$ 所在区域的染色决定. 当一个平面纠缠的外边界与另一个平面纠缠的一个洞的边界一致时, 我们可以将它们复合得到一个新的平面纠缠. 平面纠缠中的可收缩的封闭曲线可以由给定常值 δ 代替. 这个常值通常被称为量子维数.

平面代数 $\mathscr{P}_\bullet$ 是一族以 $\mathbb{N}\cup\{0\}$ 为角标的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次的线性空间 $\mathscr{P}_{n,\pm}$ (这里 $\mathscr{P}_{n,+}$ 和 $\mathscr{P}_{n,-}$ 分别对应于标准不变量中的 $\mathscr{N}'\cup\mathscr{M}_{n-1}$ 和 $\mathscr{M}'\cup\mathscr{M}_n$), 并且平面纠缠作为多重线性映射作用在这些线性空间上, 其定义域与值域取决于平面纠缠的边界条件. 平面纠缠的作用满足如下两个条件:

(1) 同痕性: 平面纠缠的作用只依赖以它的 (平面) 同痕类;

(2) 自然性: 平面纠缠的作用的符合与平面纠缠的符合是协调的.

图 2 中的平面纠缠的 2 个洞对应的定义域为 $\mathscr{P}_{2,+}$ 和 $\mathscr{P}_{2,-}$. 它的值域为 $\mathscr{P}_{3,+}$. 一般情况下 $\mathscr{P}_{n,\pm}$ 的 n 表示相应边界上端点个数为 $2n$, $+$ 或 $-$ 表示 \$ 所在区域染色为白色或黑色. 在画图时, 如果标记 \$ 在边界的最左侧, 那么省略 \$, 进一步我们省略平面纠缠的外边界.

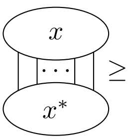
如果一个平面代数满足如下性质:

(1) 有限维: $\dim \mathscr{P}_{n,\pm} < \infty$;

(2) 可赋值性: $\dim \mathscr{P}_{0,\pm} = 1$;

(3) 球面性: 平面纠缠的作用只依赖以它的球面同痕类;

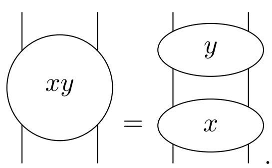
(4) 反射正定性: 存在一个与镜面反射协调的对合 $*$ 作用在每个 $\mathscr{P}_{n,\pm}$ 上, 使得 $\forall x \in \mathscr{P}_{n,\pm}$,



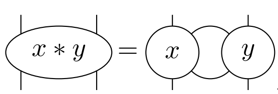
$\geq 0,$

那么称其子因子平面代数.

设 $\mathscr{P}_\bullet$ 是标准不变量给出的平面代数, $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 上的代数乘法由如下平面纠缠给出

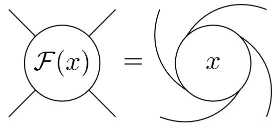


$\mathscr{P}_{2,\pm}$ 上的对偶积由如下平面纠缠给出



通过同痕性, 可以看出乘积和对偶积都有结合律. 在群的情况下, 可以将对偶积视为卷积.

平面代数有一个重要性质, 它的傅立叶变换 $\mathscr{F}: \mathscr{P}_{2,\pm} \to \mathscr{P}_{2,\mp}$ 是顺时针 90° 旋转, 由如下平面纠缠的作用给出



通过同痕性, 我们可以看出

$$x * y = \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}(x)\mathscr{F}^{-1}(y)).$$

2.5 例子: 群子因子

设 G 是一个有限交换群. 注意到 G 同构于置换群的一个子群, 故 G 可以置换作用在超有限 II_1 型因子 $\mathscr{R}$ 上, 且这个作用是外作用. 通过交叉积构造, 我们得到一个子因子 $\mathscr{R} \subset \mathscr{R} \rtimes G$. 记 $\hat{G}$ 为群 G 的对偶群, 进一步得到 Jones 塔

$$\mathscr{N} \subset \mathscr{N} \rtimes G \subset \mathscr{N} \rtimes G \rtimes \hat{G} \subset \mathscr{N} \rtimes G \rtimes \hat{G} \rtimes G \subset \cdots,$$

以及标准不变量

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{C} & \subset & \mathbb{C} & \subset & L(\hat{G}) & \subset & L(\hat{G} \rtimes G) & \subset & \cdots \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ & & \mathbb{C} & \subset & \mathbb{C} & \subset & L(G) & \subset & \cdots. \end{array}$$

设 $\mathscr{P}_\bullet$ 是标准不变量给出的平面代数, 那么 $\mathscr{P}_{2,+}$ 是群函数空间 $L(\hat{G})$, $\mathscr{P}_{2,-}$ 是群代数空间 $L(G)$. 这时对偶积可视为卷积. 傅立叶变换成为群上经典的离散傅立叶变换, 对此的图形解释请见文 [29].

更一般的情况, 可以将上述构造中的有限交换群替换为有限维 Kac 代数 (在下节介绍 Kac 代数). 这时得到的平面代数 $\mathscr{P}_\bullet$ 的 $\mathscr{P}_{2,+}$ 成为 Kac 代数的对偶, $\mathscr{P}_{2,-}$ 成为 Kac 代数本身. 同样地我们得到乘积, 对偶积和傅立叶变换的对应. 这个构造给出有限维 Kac 代数和不可约深度为 2 有限指标子因子之间的一一对应, 请见文 [58]. 相应 Kac 代数的代数关系与平面代数的平面纠缠作用的对应请见文 [39].

在无限维的情况, 基于一些正则条件, Enock 和 Nest 给出了离散 (或者紧) Kac 代数和不可约深度为 2 子因子的之间的一一对应 [20].

3 局部紧量子群

本节介绍局部紧量子群的定义和相关性质. 局部紧量子群见文 [41, 42], Kac 代数见文 [19].

假定 $\mathscr{M}$ 是有正规, 半有限, 忠实权 φ 的 von Neumann 代数. 令

$$\mathfrak{N}_\varphi = \{x \in \mathscr{M} \mid \varphi(x^*x) < \infty\}, \quad \mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi,$$

这里 $\mathfrak{M}_\varphi$ 是 $\mathscr{M}$ 的 $*$- 子代数. 记 $\mathscr{H}_\varphi$ 是将 $\mathfrak{N}_\varphi$ 完备化得到的 Hilbert 空间. 映射 $\Lambda_\varphi : \mathfrak{N}_\varphi \mapsto \mathscr{H}_\varphi$ 是包含映射. 记 π_φ 是 $\mathscr{H}_\varphi$ 上由

$$\pi_\varphi(a)\Lambda_\varphi(b) = \Lambda_\varphi(ab), \quad \forall\, a \in \mathscr{M}, \quad b \in \mathfrak{N}_\varphi$$

给出的 $\mathscr{M}$ 上的 $*$ 同构. 三元组 $(\pi_\varphi, \mathscr{H}_\varphi, \Lambda_\varphi)$ 称为 $\mathscr{M}$ 的半循环表示. 记 ∇_φ 为关于 φ 的模算子, σ_t^φ 为关于 φ 的模自同构群, $t \in \mathbb{R}$, J_φ 为 $\mathscr{H}_\varphi$ 上的共轭酉元.

局部紧量子群 $\mathbb{G} = (\mathscr{M}, \Delta, \varphi, \psi)$ 由以下元素组成:

(1) 一个 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$;

(2) 一个正规, 保单位, $*$- 同态 $\Delta : \mathscr{M} \to \mathscr{M} \bar{\otimes} \mathscr{M}$ 满足 $(\Delta \otimes \iota) \circ \Delta = (\iota \otimes \Delta) \circ \Delta$;

(3) 一个正规, 半有限, 忠实权 φ 满足 $(\iota \otimes \varphi)\Delta(x) = \varphi(x)1$, $\forall\, x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, 以及一个正规, 半有限, 忠实权 ψ 满足 $(\psi \otimes \iota)\Delta(x) = \psi(x)1$, $\forall\, x \in \mathfrak{M}_\psi^+$.

这里 $\overline{\otimes}$ 指 von Neumann 代数张量积, ι 指恒同映射. 正规, 保单位, $*$- 同态 Δ 称为 $\mathscr{M}$ 上的余乘积, φ 是左 Haar 权, ψ 是右 Haar 权.

假定 $\mathscr{M}$ 作用在 $\mathscr{H}_\varphi$ 上, 那么存在唯一个酉元 $W \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\varphi \otimes \mathscr{H}_\varphi)$, 满足

$$W^*(\Lambda_\varphi(a) \otimes \Lambda_\varphi(b)) = (\Lambda_\varphi \otimes \Lambda_\varphi)(\Delta(b)(a \otimes 1)), \quad \forall\, a, b \in \mathfrak{N}_\varphi.$$

我们称上述酉元为可乘酉元. 更进一步地, 对任意 $x \in \mathscr{M}$, 有 $\Delta(x) = W^*(1 \otimes x)W$.

对于上述定义的局部紧量子群 $\mathbb{G} = (\mathscr{M}, \Delta, \varphi, \psi)$, 存在一个酉对径 R, 比例自同构群 $\tau_t, t\in\mathbb{R}$ 和 $\mathscr{M}$ 上的对径 S. 还存在一个模元 δ 满足 $\psi = \varphi_\delta = \varphi R$. 记 ρ_t 为满足对任意 $\omega \in \mathscr{M}_*$, $x \in \mathscr{M}$ 和 $t \in \mathbb{R}$, 有 $\rho_t(\omega) = \omega(\delta^{-\mathrm{it}}\tau_{-t}(x))$ 的 $\mathscr{M}_*$ 上连续单参数表示, 这里 $\mathscr{M}_*$ 是 $\mathscr{M}$ 的预对偶.

对于局部紧量子群 $\mathbb{G} = (\mathscr{M}, \Delta, \varphi, \psi)$, 总存在它的对偶局部紧量子群 $\hat{\mathbb{G}} = (\hat{\mathscr{M}}, \hat{\Delta}, \hat{\varphi}, \hat{\psi})$. 其作用在 $\mathscr{H}_\varphi$ 上的相应的 von Neumann 代数 $\hat{\mathscr{M}}$ 由以下表达式给出:

$$\hat{\mathscr{M}} = \{(\omega \otimes \iota)(W) \,|\, \omega \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\varphi)_*\}''.$$

记元素 $(\omega\otimes\iota)(W)$ 为 $\lambda(\omega)$. 通常这个元素称为 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 上正规态 ω 限制在 $\mathscr{M}$ 上得到的 $\omega|_{\mathscr{M}}$ 的傅立叶变换. 相应的余乘积 $\hat{\Delta}$ 由以下表达式给出

$$\hat{\Delta}(x) = \hat{W}^*(1 \otimes x)\hat{W}, \quad \hat{W} = \Sigma W^* \Sigma,$$

这里 Σ 是 $\mathscr{H}_\varphi \otimes \mathscr{H}_\varphi$ 上的对换映射. 对偶左 Haar 权 $\hat{\varphi}$ 定义为由 GNS 构造得到的三元组 $(\mathscr{H}_\varphi, \iota, \hat{\Lambda})$ 唯一定出的 $\hat{\mathscr{M}}$ 上的正规, 半有限, 忠实权. 定义

$$\mathscr{I} = \{\omega \in \mathscr{M}_* \,|\, \Lambda_\varphi(x) \mapsto \omega(x^*),\, x \in \mathfrak{N}_\varphi\, \text{有界}\},$$

则 $\lambda(\mathscr{I})$ 是映射 $\hat{\Lambda}$ 的核且 $\hat{\Lambda}(\lambda(\omega)) = \xi(\omega)$, $\omega \in \mathscr{I}$. 这里 $\xi(\omega)$ 由 $\omega(x^*) = \langle \xi(\omega), \Lambda_\varphi(x)\rangle$ 给出. 对偶右 Haar 权 $\hat{\psi} = \hat{\varphi}\hat{R}$, 这里 $\hat{R}$ 是 R 的对偶.

设 $\mathbb{G}$ 是一个局部紧量子群, 如果它的比例自同构群是平凡的且 $\sigma^\varphi = \sigma^\psi$, 那么 $\mathbb{G}$ 是 Kac 代数. 如果 $\varphi = \psi$ 是态, 那么 $\mathbb{G}$ 称为紧量子群. 如果 $\varphi = \psi$ 是迹权, 那么 $\mathbb{G}$ 称为幺模 Kac 代数.

注意到上面定义的傅立叶变换 λ 是从 $\mathscr{M}_*$ 到 $\hat{\mathscr{M}}$ 的映射. 为了给出与经典类似的傅立叶变换, 我们将 $\mathscr{M}_*$ 看成 $L^1(\mathscr{M})$, 而将 $\mathscr{M}$ 看成 $L^\infty(\mathscr{M})$, 然后利用 Banach 空间插值定理得到合适的 $L^p(\mathscr{M})$ 空间, $1 \leq p \leq \infty$. 由此定义傅立叶变换 $\mathscr{F}_p : L^p(\mathscr{M}) \to L^q(\hat{\mathscr{M}})$. 更多局部紧量子群的傅立叶变换请见文 [8, 12].

4 双投影及其双平移

这一节将简单回顾子因子和局部紧量子群上的双投影.

设 $\mathscr{P}$ 是一个不可约子因子平面代数. 如果 $B \in \mathscr{P}_{2,\pm}$ 是一个投影且 $\mathscr{F}(B)$ 是一个投影的数乘, 那么就称 B 是一个双投影. 如果 $B \in \mathscr{P}_{2,\pm}$ 是一个双投影, 那么

$$B * B = \frac{\mathrm{tr}_2(B)}{\delta} B.$$

Bisch 首先在有限指标子因子上提出了双投影的概念, 并证明双投影都是的其中间因子上的投影 [4]. 这个概念推广了子群上的指标函数. 从双模的角度出发, Bisch 和 Jones 在平面代数中给出了双投影的图形表示 [6].

我们同样也可与对局部紧量子群定义双投影. 设 $\mathbb{G}$ 是一个局部紧量子群. 如果 $B \in L^1(\mathbb{G})$ 且 $\mathscr{F}(B)$ 是一个投影的数乘, 那么称 B 是一个双投影.

对于局部紧量子群本身有类似双投影的概念仿群投影. 如果 $p\in L^{\infty}(\mathbb{G})$是一个非零投影满足

$$\Delta(p)(1\otimes p)=p\otimes p,$$

那么称 p 是一个仿群投影. 在文 [44] 中, 王斯萌和刘正伟证明了仿群投影 $p\in L^1(\mathbb{G})$ 则 p 是一个双投影, 反之如果左 Haar 权等于右 Haar 权或者左 Haar 权是迹权, 那么双投影 p 是仿群投影.

类比于群的 (左, 右) 陪集, 定义双投影的平移. 设 $\mathscr{P}$ 是一个不可约子因子平面代数, B 是一个双投影. 如果 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中投影 x 满足 $\mathrm{tr}_2(x)=\mathrm{tr}_2(B)$ 和 $x*B=\frac{\mathrm{tr}_2(B)}{\delta}x$, 那么称 x 是 B 的左平移; 如果 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中投影 x 满足 $\mathrm{tr}_2(x)=\mathrm{tr}_2(B)$ 和 $B*x=\frac{\mathrm{tr}_2(B)}{\delta}x$, 那么称 x 是 B 的右平移; 如果 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中投影 x 满足存在一个 B 的左平移 ${}_gB$, 使得 $x\leq {}_gB$, 那么称 x 是 B 的左子平移; 如果 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中投影 x 满足存在一个 B 的右平移 B_g, 使得 $x\leq B_g$, 那么称 x 是 B 的右子平移.

注意到 $\mathscr{P}_{2,+}$ 和 $\mathscr{P}_{2,-}$ 互为对偶, 因此得到两种不同的平移. 可以将 $\mathscr{P}_{2,-}$ 上的左右平移视为 $\mathscr{P}_{2,+}$ 上的 "上下" 平移. 基于这个观点, 我们定义双投影的双平移. 如果 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中的非零元 x 满足存在一个双投影 B 的右平移 B_g 和 $\widetilde{B}$ 的右平移 $\widetilde{B}_h$ 以及元素 y, 使得 $x=\mathscr{F}(\widetilde{B}_h)*(yB_g)$, 那么就称 x 是双投影 B 的双平移, 这里 $\widetilde{B}$ 是 $\mathscr{F}(B)$ 的值域投影.

在交换群的情况下, 双投影的双平移总可以对其子群的指标函数作两次平移得到, 即群及其对偶空间上的平移.

在子因子中, 由于 $\mathscr{P}_{2,+}$ 和 $\mathscr{P}_{2,-}$ 均为非交换代数, 双投影及其双平移的性质要复杂很多. 举个例子, 我们很容易证明子群的左陪集也是 (另一个) 子群的右陪集, 然而我们要从全新的角度去证明双投影的左平移也是双投影的右平移. 另一方面有限群的子群个数为有限个, 然而有限指标子因子的中间因子可能是不可数的. 这使得双投影构成的空间的拓扑变得更为有趣, 同时也给其分析性质的研究带来全新的问题.

5 Hausdorff–Young 不等式

这一节讨论子因子和局部紧量子群上的 Hausdorff–Young 不等式.

设 G 是一个幺模局部紧交换群, $\mathscr{F}$ 是从 $L^p(G)$ 到 $L^q(\hat{G})$ 的傅立叶变换, 这里 $1\leq p\leq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 那么 Hausdorff–Young 不等式是

$$\|\mathscr{F}(f)\|_q\leq\|f\|_p,$$

这里 f 是 $L^p(G)$ 中可测函数.

在交换群的情况, 傅立叶变换有显示的积分表达式, 且这时 $L^p(G)$ 和 $L^q(\hat{G})$ 都是函数空间. 对于一般的局部紧群, $L^q(\hat{G})$ 是不再是交换的函数空间, 而是一个非交换的算子空间. 这个概念定义本身并不平凡, 更多关于算子空间和非交换 L^p 空间见文 [27, 51, 63]. 1958 年, Kunze 证明了幺模局部紧群上的 Hausdorff–Young 不等式. 1974 年, Russo 完全刻画了幺模局部紧群上 Hausdorff–Young 不等式的极值函数. 1975 年, Beckner 改进了实数群 $\mathbb{R}$ 上的 Hausdorff–Young 不等式, 给出了强 Hausdorff–Young 不等式:

$$\|\mathscr{F}(f)\|_p\leq A_q\|f\|_q,$$

这里 $A_q=q^{\frac{1}{2q}}p^{-\frac{1}{2p}}$, 并证明其极值函数是高斯函数. 1977 年, Fournier 利用幺模局部紧群上 Young 不等式的等号成立条件刻画了 Hausdorff–Young 不等式的极值函数. 2012 年, Cooney 证明了局部紧量子群上的 Hausdorff–Young 不等式.

针对子因子的情形, 文 [31] 证明了不可约子因子平面代数上的 Hausdorff–Young 不等式:

定理 5.1 设 $\mathscr{P}$ 是一个不可约子因子平面代数. 对于任意 $x \in \mathscr{P}_{2,\pm}$,

$$\|\mathscr{F}(x)\|_p \leq \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\frac{2}{p}} \|x\|_q,$$

这里 $2 \leq p \leq \infty$ 和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

为了给出下面的结果, 需要介绍几个重要概念. 如果一个元素 $x \in \mathscr{P}_{2,\pm}$ 满足 $\|\mathscr{F}(x)\|_\infty = \frac{\|x\|_1}{\delta}$, 那么称 x 是极端的. 对于不可约子因子平面代数, 正元一定是极端的. 如果非零元素 $x \in \mathscr{P}_{2,\pm}$ 及 $\mathscr{F}(x)$ 都是部分等距的数乘且都是极端的, 那么称 x 是极端双部分等距. 在文 [31] 中, 蒋春澜和刘正伟证明了 x 是双投影的双平移当且仅当 x 是极端双部分等距.

更进一步, 蒋春澜和刘正伟 [32] 还刻画了 Hausdorff–Young 不等式的等号成立条件.

定理 5.2 设 $\mathscr{P}$ 是一个不可约子因子平面代数. 令 $x \in \mathscr{P}_{2,\pm}$ 非零, 那么如下陈述等价:

(1) $\|\mathscr{F}(x)\|_{\frac{t}{t-1}} = (\frac{1}{\delta})^{\frac{2}{t}-1}\|x\|_t$ 对某个 $1 < t < 2$;

(2) $\|\mathscr{F}(x)\|_{\frac{t}{t-1}} = (\frac{1}{\delta})^{\frac{2}{t}-1}\|x\|_t$ 对任意 $1 \leq t \leq 2$;

(3) x 是一个双投影的双平移.

对于局部紧量子群的情形, 刘正伟 [45] 推广了 Russo 的结果完全刻画了幺模 Kac 代数上 Hausdorff–Young 不等式的等号成立条件.

定理 5.3 设 $\mathbb{G}$ 是一个幺模 Kac 代数. 令 x 是 φ- 可测的, 那么如下陈述等价:

(1) $\|\mathscr{F}(x)\|_{\frac{t}{t-1}} = \|x\|_t$ 对某个 $1 < t < 2$;

(2) $\|\mathscr{F}(x)\|_{\frac{t}{t-1}} = \|x\|_t$ 对任意 $1 \leq t \leq 2$;

(3) x 是一个双投影的双平移.

6 Young 不等式

这一节中将讨论子因子上的 Young 不等式和局部紧量子群上的 Young 不等式. 设 G 是一个幺模局部紧群, 则 G 上的 Young 不等式是

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_t \|g\|_s,$$

这里 $f \in L^t(G), g \in L^s(G)$, 且 $1 \leq r, t, s \leq \infty$, $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{t} + \frac{1}{s}$. Young 在 1912 年针对 $\mathbb{R}$ 上函数的卷积计算收敛性发现了一类不等式, 后人称其为 Young 不等式 [69]. 随后 Young 不等式被广泛使用. 1975 年 Beckner 改进了 $\mathbb{R}$ 上的 Young 不等式, 给出了 $\mathbb{R}$ 上的强 Young 不等式:

$$\|f * g\|_r \leq A_t A_s A_{r'} \|f\|_t \|g\|_s,$$

这里 $r' = \frac{r}{r-1}$, 并证明了高斯函数对是其全部的极值对. 1977 年 Fournier 完全刻画了幺模局部紧群上 Young 不等式的极值对. 1978 年 Klein 和 Russo 描述了一般局部紧群上的 Young 不等式, 并证明了 Heisenberg 群上的强 Young 不等式.

对于子因子的情形, 蒋春澜和刘正伟 [31] 证明了不可约子因子平面代数上的 Young 不等式

定理 6.1 对任意 $x, y \in \mathscr{P}_{2,\pm}$, 有

$$\|x * y\|_r \leq \frac{\|x\|_p \|y\|_q}{\delta},$$

这里 $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.

更进一步, 蒋春澜和刘正伟 [32] 完全刻画了 Young 不等式的极值对.

定理 6.2 设 $\mathscr{P}$ 是不可约子因子平面代数. 令 x, y 是 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中非零元, 那么如下命题等价:

(1) $\|x*y\|_r = \frac{1}{\delta}\|x\|_t\|y\|_s$ 对某个 $1<r,t,s<\infty$, 使得 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{t}+\frac{1}{s}$;

(2) $\|x*y\|_r = \frac{1}{\delta}\|x\|_t\|y\|_s$ 对任意 $1\le r,t,s\le\infty$, 使得 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{t}+\frac{1}{s}$;

(3) 存在一个在 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中的双投影 B, 使得 $x=(a_x\ {}_hB)*\mathscr{F}(\widetilde{B}_g)$ 且 $y=\mathscr{F}(\widetilde{B}_g)*(a_yB_f)$, 这里 B_g, B_f 都是 B 的右平移, ${}_hB$ 是 B 的左平移且 a_x, a_y 都是在 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中使得 x, y 非零.

最近, 王斯萌和刘正伟给出了局部紧量子群上的 Young 不等式 [44]:

定理 6.3 设 $\mathbb{G}$ 是局部紧量子群. 取 $1\le p,q,r\le 2$ 满足 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, 令 p' 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 如果 $x\in L^p(\mathbb{G})$ 且 $y\in L^q(\mathbb{G})$, 那么

$$\|x*\rho_{-i/p'}(y)\|_r\le\|x\|_p\|y\|_q.$$

2016 年, 刘正伟还完全刻画了幺模 Kac 代数上 Young 不等式的极值对 [45].

定理 6.4 设 $\mathbb{G}$ 是幺模 Kac 代数. 令 x, y 是 φ- 可测, 那么以下陈述等价:

(1) $\|x*y\|_r=\|x\|_t\|y\|_s$ 对某个 $1<r,t,s<\infty$, 使得 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{t}+\frac{1}{s}$;

(2) $\|x*y\|_r=\|x\|_t\|y\|_s$ 对任意 $1\le r,t,s\le\infty$, 使得 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{t}+\frac{1}{s}$;

(3) 存在 B, 使得 $x=(\ {}_hBa_x)*\mathscr{F}(\widetilde{B}_g)$ 且 $y=\mathscr{F}(\widetilde{B}_g)*(B_fa_y)$, 这里 B_g, B_f 都是 B 右平移, ${}_hB$ 是 B 的左平移且 $a_x, a_y\in L^\infty(\mathbb{G})$, 使得 x, y 非零.

7 不确定原理

不确定原理最初是海森堡在研究量子力学中发现的, 随后在分析, 信息, 量子信息等领域发现了各种版本的不确定原理. 这一节主要介绍 Hirschman–Beckner 不确定原理, Donoho–Stark 不确定原理和 Hardy 不确定原理.

7.1 Hirschman–Beckner 不确定原理

1957 年, Hirschman 证明了 $\mathbb{R}$ 上的一个关于熵的不确定原理

$$H_s(|f|^2)+H_s(|\hat{f}|^2)\ge 0, \tag{7.1}$$

这里 $\|f\|_2=1$, $H_s(|f|^2)=-\int|f|^2\log|f|^2dx$ 是 Shannon 熵, 并提出了一个 $\mathbb{R}$ 上关于熵的一个更强的不确定原理 (不等式 (1.1)) 的猜想. 1975 年, Beckner 证明了这一个猜想. 2004 年, Özaydm 和 Przebinda 证明了任意局部紧交换群上的 Hirschman–Beckner 不确定原理, 即不等式 (7.1) 对任意局部近交换群成立, 并刻画了它们的等号成立条件. 2014 年, Crann 和 Kalantar 证明幺模 Kac 代数上有这一不确定原理.

对于子因子情形, 蒋春澜和刘正伟 [31] 证明了不可约子因子平面代数的 Hirschman–Beckner 不确定原理并确定其等号成立条件:

定理 7.1 设 $\mathscr{P}$ 是一个不可约子因子平面代数且 $x\in\mathscr{P}_{2,\pm}$ 非零, 那么

$$H(|x|^2)+H(|\mathscr{F}(x)|^2)\ge\|x\|_2(2\log\delta-4\log\|x\|_2),$$

这里 $H(|x|^2)=-\mathrm{tr}_2(|x|^2\log|x|^2)$ 是 von Neumann 熵. 更进一步, 我们有等号成立当且仅当 x 是一个双投影的双平移.

对于局部紧量子群的情形, 刘正伟 [45] 证明了 Hirschman–Beckner 不确定原理的等号成立条件:

定理 7.2 设 $\mathbb{G}$ 是一个幺模 Kac 代数且 $x \in L^1(\mathbb{G}) \cap L^2(\mathbb{G})$ 非零, 那么

$$H(|x|^2) + H(|\mathscr{F}(x)|^2) \geq -\|x\|_2 4 \log \|x\|_2.$$

更进一步, 我们有等号成立当且仅当 x 是一个双投影的双平移.

7.2 Donoho–Stark 不确定原理

1989 年, Donoho 和 Stark 在循环群上证明了关于支撑集的不确定原理同时还刻画了等号成立. 设 G 是一个有限循环群. 记 f 是 G 上的一个函数, 则

$$|\mathrm{supp}(f)|\,|\mathrm{supp}(\hat{f})| \geq |G|,$$

这里 $\mathrm{supp}(f) = \{x \in G : f(x) \neq 0\}$, $|S|$ 是集合 S 的元素个数. 1990 年, Smith 发现这一不确定原理对有限交换群都是成立的. 2004 年, Özaydm 和 Przebinda 证明了任意局部紧交换群上的 Donoho–Stark 不确定原理, 并刻画了他们的等号成立条件. 2008 年, Algic 和 Russell 针对紧群证明这一不确定原理. 2014 年, Crann 和 Kalantar 证明幺模 Kac 代数上有这一不确定原理.

对于子因子的情形, 蒋春澜和刘正伟证明了不可约子因子平面代数上的 Donoho–Stark 不确定原理, 并刻画了等号成立条件.

定理 7.3 设 $\mathscr{P}$ 是一个不可约子因子平面代数, 那么对任意非零 $x \in \mathscr{P}_{2,\pm}$, 有

$$\mathscr{S}(x)\mathscr{S}(\mathscr{F}(x)) \geq \delta^2,$$

这里 $\mathscr{S}(x) = \mathrm{tr}_2(\mathscr{R}(x))$, $\mathscr{R}(x)$ 是 x 的值域投影算子. 更进一步, 我们有等号成立当且仅当 x 是一个双投影的双平移.

对于局部紧量子群的情形, 刘正伟 [45] 刻画了 Donoho–Stark 不确定原理的等号成立条件.

定理 7.4 设 $\mathbb{G}$ 是一个幺模 Kac 代数, 那么对任意非零 $x \in L^1(\mathbb{G}) \cap L^2(\mathbb{G})$,

$$\mathscr{S}(x)\mathscr{S}(\mathscr{F}(x)) \geq 1.$$

更进一步, 我们有等号成立当且仅当 x 是一个双投影的双平移.

7.3 Hardy 不确定原理

1933 年, Hardy [26] 基于高斯函数证明了 $\mathbb{R}$ 上的一个不确定原理. 如果对某个 $\mathbb{R}$ 上可测函数 f 和某些常数 C, C', $a > 0$, 有

$$|f(x)| \leq C\mathrm{e}^{-\pi a x^2}, \quad |\hat{f}(\xi)| \leq C'\mathrm{e}^{-\pi \xi^2/a},$$

那么 f 是 $\mathrm{e}^{-\pi a x^2}$ 一个数乘.

类似地对于子因子情形, 蒋春澜和刘正伟基于不确定原理极小值的刻画给出了不可约子因子平面代数上的 Hardy 不确定原理.

定理 7.5 设 $\mathscr{P}$ 是不可约子因子平面代数. 记 w 是 Hirschman–Beckner 不确定原理的一个极小值. 如果对于任意 $x \in \mathscr{P}_{2,\pm}$ 和常数 C, C' 有 $|x| \leq C|w|$, $|\mathscr{F}(x)| \leq C'|\mathscr{F}(w)|$, 那么 x 是 w 的一个数乘.

对于局部紧量子群情形, 刘正伟给出了有双投影的幺模 Kac 代数上的 Hardy 不确定原理.

定理 7.6 设 $\mathbb{G}$ 是一个有双投影的幺模 Kac 代数. 假定 $w \in L^1(\mathbb{G}) \cap L^\infty(\mathbb{G})$ 是一个双投影的双平移. 如果对任意 $x \in L^1(\mathbb{G}) \cap L^\infty(\mathbb{G})$ 和某常数 $C > 0$ 及 $C' > 0$, 有 $|x| \leq C|w|$ 和 $|\mathscr{F}(x)| \leq C'|\mathscr{F}(w)|$, 那么 x 是 w 的数乘.

8 合集估计

令 A, B 是同属于有限加法群 G 的可加子集. 可加组合 [61] 中, 一个非常基本的问题是逆合集问题: 如果 $A+B$ 或者 $A-B$ 足够小, 那么我们能得到 A 或 B 的何种信息? 最基本的和集估计是如下不等式: $\max\{|A|,|B|\} \le |A+B|, |A-B| \le |A|\,|B|$, 这里 $|A|$ 是集合 A 的元素个数. 精确逆合集定理 [61] 是说如下陈述等价:

(1) $|A+B| = |A|$;

(2) $|A-B| = |A|$;

(3) $|A-nB-mB| = |A|$ 对至少一对整数 $(n,m) \neq (0,0)$;

(4) $|A-nB-mB| = |A|$ 所有整数 n, m;

(5) 存在 G 中有限子群 H, 使得 B 包含在 H 的陪集中, A 是 H 的某些陪集的并.

对应于集合上的加法, 我们可以考虑子因子平面代数上投影的对偶积. 这样对于子因子, 蒋春澜和刘正伟得到如下非交换的合集定理 [32]:

定理 8.1 设 $\mathscr{P}$ 是不可约平面代数. 记 $p, q \in \mathscr{P}_{2,\pm}$ 是投影. 令 B_1 为由 $q * \overline{q}$ 生成的双投影, B_2 为 $\overline{p} * p$ 对应于 $\frac{\mathrm{tr}_2(p)}{\delta}$ 的谱投影, 那么 $\max\{\mathrm{tr}_2(p), \mathrm{tr}_2(q)\} \le \mathscr{S}(p*q) \le \mathrm{tr}_2(p)\mathrm{tr}_2(q)$, 更进一步, 如下陈述等价:

(1) $\mathscr{S}(p*q) = \mathrm{tr}_2(p)$;

(2) $\frac{\delta}{\mathrm{tr}_2(q)} p*q$ 是投影;

(3) $\mathscr{S}(p*(q*\overline{q})^{*(m)}*q^{*(j)}) = \mathrm{tr}_2(p)$, 对某个 $m \ge 0$, $j \in \{0,1\}$, $m+j>0$, 这里 $q^{*(0)} = e_1$, e_1 是 Jones 投影;

(4) $\mathscr{S}(p*(q*\overline{q})^{*(m)}*q^{*(j)}) = \mathrm{tr}_2(p)$, 对任意 $m \ge 0$, $j \in \{0,1\}$, $m+j>0$;

(5) 存在 $\mathscr{P}_{2,\pm}$ 中双投影 B, 使得 q 是 B 的右子投影且对某个 $x>0$, $p = \mathscr{R}(x*B)$;

(6) $B_1 \le B_2$;

(7) $\|p*q\|_t = \frac{1}{\delta}\|p\|_t\|q\|_1$ 对某个 $1<t<\infty$;

(8) $\|p*q\|_t = \frac{1}{\delta}\|p\|_t\|q\|_1$ 对任意 $1 \le t \le \infty$.

对于局部紧量子群的情形, 刘正伟证明了如下非交换的合集定理 [45].

定理 8.2 设 $\mathbb{G}$ 是幺模 Kac 代数. 令 p, q 是 $L^\infty(\mathbb{G})$ 中的投影, 那么 $\max\{\varphi(p), \varphi(q)\} \le \mathscr{S}(p*q)$. 更进一步, 如下陈述等价:

(1) $\mathscr{S}(p*q) = \varphi(p) < \infty$;

(2) $\varphi(q)^{-1} p*q$ 是 $L^1(\mathbb{G})$ 中的投影;

(3) $\mathscr{S}(p*(q*R(q)^{*(m)})*q^{*(j)}) = \varphi(p)$ 对某个 $m \ge 0$, $j \in \{0,1\}$, $m+j>0$, $q^{*(0)}$ 意味着 q 不出现;

(4) 存在双投影 B, 使得 q 是 B 的右子平移且对某个 $x>0$, $p = \mathscr{R}(x*B)$.

注意到, 对于幺模 Kac 代数的情形, 合集定理没有给出上界. 例子不难从 $\mathbb{R}$ 中构造出来.

9 双投影的双平移

从前面的讨论中, 我们发现双投影的双平移是一个核心概念, 因其出现在各不等式的等号成立条件中. 故在此给出不可约子因子平面代数中的双投影的双平移的已知的全部等价刻画:

(1) x 是双投影的双平移;

(2) x 是极端双部分等距; (2)$'$ x 是部分等距的数乘且 $\mathscr{F}^{-1}(x)$ 是极端的;

(3) $\mathscr{S}(x)\mathscr{S}(\mathscr{F}(x))=\delta^2$;

(4) $H(|x|^2)+H(|\mathscr{F}(x)|^2)=\|x\|_2^2(2\log\delta-4\log\|x\|_2)$;

(5) $\|x*\overline{x^*}\|_r=\frac{1}{\delta}\|x\|_t\|x\|_s$ 对某些 $1<r,t,s<\infty$, 使得 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{t}+\frac{1}{s}$;

(6) $\|x*\overline{x^*}\|_r=\frac{1}{\delta}\|x\|_1\|x\|_r$ 对某个 $1<r<\infty$;

(7) $\|x*\overline{x^*}\|_r=\frac{1}{\delta}\|x\|_t\|x\|_s$ 对任意 $1\le r,t,s\le\infty$, 使得 $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{t}+\frac{1}{s}$;

(8) $\|\mathscr{F}(x)\|_{\frac{t}{t-1}}=\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{t}-1}\|x\|_t$ 对某个 $1<t<2$;

(9) $\|\mathscr{F}(x)\|_{\frac{t}{t-1}}=\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{t}-1}\|x\|_t$ 对任意 $1\le t\le 2$;

(10) x 是部分等距的数乘, $\mathscr{S}(x*\overline{x^*})=\mathscr{S}(x)$ 且 $\|x*\overline{x^*}\|_1=\|x\|_1^2$.

对于幺模 Kac 代数, 也有关于双投影的双平移的类似等价刻画.

10 总结和展望

子因子上的 Hausdorff–Young 不等式和 Young 不等式的证明是不同于经典情形的证明. 局部紧量子群上的 Hausdorff–Young 不等式的证明难点在于处理非交换的 L^p 空间, 两端的不等式很容易得到是因为有可乘酉元. 子因子上并没有可乘酉元. 局部紧量子群上的 Young 不等式的难点在于找到合适的非交换 L^p 空间运用插值定理. 一般的局部紧量子群上的 Young 不等式仅能证明对 $1\le r,p,q\le 2$ 的情形成立, 对于 $r=\infty$ 能找到反例, 但是对 Kac 代数的大部分情况能证明 Young 不等式对 $1\le r,p,q\le\infty$ 成立 [44]. 在经典的情形下 Hausdorff–Young 不等式和 Young 不等式的等号成立条件能够给出比较直接的证明, 但是在非交换的情况, 因为没有群元素平移这一有力工具, 极难给出直接证明. 这里我们幸运的是有对不确定原理比较系统的研究和了解.

子因子上的 Hirschman–Beckner 不确定原理和 Donoho–Stark 不确定原理的等号成立条件的刻画也是不同于经典的情形. 为了解决群元素平移在非交换情形的表现形式, 我们提出了子因子上的双投影的双平移, 另外还将其移植至 Kac 代数上. 为了刻画 Young 不等式的等号成立条件, 还需要借助可加组合中的合集定理. 注意到非交换合集定理的证明完全不同于经典合集估计和精确逆和集定理的证明. 借助非交换和集定理和不确定原理本身及其等号成立条件, 我们可以刻画 Young 不等式的等号成立条件, 进而刻画 Hausdorff–Young 不等式的等号成立条件. 相比于子因子的情形, 幺模 Kac 代数还要处理更多的不平凡的拓扑问题.

下面列举一些相关的问题:

(1) 是否能够在子因子或局部紧量子群上给出更加强的 Hausdorff–Young 不等式和 Young 不等式?

(2) 是否能够在子因子或局部紧量子群上给出更加强的 Hirschmann-Beckner 不确定原理?

(3) 是否能够统一子因子和局部紧量子群, 并证明上述类似的结论?

(4) 设 $\mathscr{P}$ 是一个子因子平面代数. 如果 $x\in\mathscr{P}_{2,\pm}$ 是一个投影满足 $\|x*x-\frac{\mathrm{tr}_2(x)}{\delta}x\|_2$ 足够小, 那么是否存在一个双投影 B, 使得 $\|x-B\|_2$ 足够小

致谢 非常感谢 Jones, 蒋春澜, 许全华教授的支持. 同时也感谢审稿人的细心阅读和建议.

参 考 文 献

[1] Alagic G., Russell A., Uncertainty principles for compact groups, *Illinois J. Math.*, 2008, **52**(4): 1315–1324.
[2] Atiyah M. F., Topological quantum field theories, *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 1988, **68**: 175–186.
[3] Beckner W., Inequalities in fourier analysis, *Ann. Math.*, 1975, **102**: 159–182.
[4] Bisch D., A note on intermediate subfactors, *Pacific J. Math.*, 1994, **163**: 201–216.
[5] Bisch D., An example of an irreducible subfactor of the hyperfinite II1 factor with rational, noninteger index, *J. Reine Angew. Math.*, 1994, **455**: 21–34.
[6] Bisch D., Jones V., Algebras associated to intermediate subfactors, *Invent. Math.*, 1997, **128**: 89–157.
[7] Burn M., Subfactor, planar algebras and rotations Ph.D. thesis at the University of California, Berkeley, 2003, arXiv:1111.1362.
[8] Caspers M., The L^p-Fourier transform on locally compact quantum groups, *J. Oper. Theory*, 2013, **69**: 161–193.
[9] Connes A., On the spatial theory of von Neumann algebras, *J. Funct. Anal.*, 1980, **35**(2): 153–164.
[10] Crann J., Kalantar M., An uncertainty principle for unimodular quantum groups, *J. Math. Phys.*, 2014, **55**: 081704.
[11] Candes E., Romberg J., Tao T., Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**: 489–509.
[12] Cooney T., *A* Hausdorff–Young inequality for locally compact quantum groups, *Inter. J. Math.*, 2012, **21**(12): 1619–1632.
[13] van Daele A., The Fourier transform in quantum group theory, ArXiv:math/0609502v3.
[14] Dembo A., Cover T. M., Thomas J. A., Information theoritc inequalities, *IEEE Transactions on Information Theory*, 1991, **37**: 1501–1518.
[15] Donoho D. L., Stark P. B., Uncertainty principles and signal recovery, *SIAM J. Appl. Math.*, 1989, **49**: 906–931.
[16] Enock M., Schwartz J. M., Une dualité dans les algebres de von Neumann, *Note C.R. Acad. Sc. Paris*, 1973, **277**: 683–685.
[17] Enock M., Schwartz J. M., Une categorie d'algebres de Kac, *Note C.R. Acad. Sc. Paris*, 1974, **279**: 643–645.
[18] Enock M., Schwartz J. M., Une dulite dans les algebres de von Neumann, *Supp. Bull. Soc. Math. France Memoire*, 1975, **44**: 643–645.
[19] Enock M., Schwartz J. M., Kac Algrbras and Duality of Locally Compact Groups, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[20] Enock M., Nest R., Irreducible inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras, *J. Funct. Anal.*, 1996, **137**: 466–543.
[21] Etingof P., Nikshych D., Ostrik V., On fusion categories, *Annals of Mathematics*, 2005, **162**: 581–642.
[22] Evans D., Kawahigashi Y., Quantum Symmetries on Operator Algebras, Clarendon Press, **147**, Oxford, 1998.
[23] Fourier J. B. J., The Analytic Theory of Heat, Cambridge University Press, Cambridge, 1878.
[24] Fournier J. J. F., Sharpness in Young's inequality for convolution, *Pacific J. Math.*, 1977, **72**(2): 382–397.
[25] Goldstein D., Guralnick R., Isaacs I., Inequalities for finite group permutation modules, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2005, **357**: 4017–4042.
[26] Hardy G. H., A theorem concerning Fourier transforms, *J. London Math. Soc.*, 1933, **8**(3): 227–231.
[27] Haagerup U., Junge M., Xu Q., A reduction method for noncommutative L_p-spaces and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, **362**(4): 2125–2165.
[28] Hirschman I. I., A note on entropy, *Amer. J. Math.*, 1957, **79**: 152–156.
[29] Jaffe A., Liu Z., Planar para algebras, reflection positivity, to appear Communications in Mathematical Physics.
[30] Jaffe A., Liu Z., Wozniakowski A., Holographic software for quantum networks, arXiv:1605.00127.
[31] Jiang C., Liu Z., Wu J., Noncommutative uncertainty principles, *J. Funct. Anal.*, 2016, **270**: 264–311.
[32] Jiang C., Liu Z., Wu J., A Noncommutative Sum Set Theorem and Renormalization Maps, Extremal Pairs of Young's Inequality, Renormalization Maps, 2016.
[33] Jones V., Planar algebras, I, *New Zealand J. Math.*, 1999, QA/9909027.
[34] Jones V., Index for subfactors, *Invent. Math.*, 1983, **72**: 1–25.
[35] Jones V., Quadratic tangles in planar algebras, *Duke Math. J.*, 2012, **161**: 2257–2295.
[36] Jones V., Penneys D., Infinite index subfactors and the GICAR categories, *Comm. Math. Phys.*, 2015, **339**(2): 729–768. 2013.

[37] Jones V., Sunder V., Introduction to subfactors, Cambridge Press, London Mathematical Society LNS 234, 1997.

[38] Kadison R. V., Ringrose J. R., Fundamentals of the theory of operator algebras, I, II, Academy Press, New York, 1983 and 1986.

[39] Kodiyalam V., Landau Z., Sunder V., The planar algebra associated to a Kac algebra, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 2003, **113**(1): 15–51.

[40] Kosaki H., Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: noncommutative L^p-spaces, *J. Funct. Anal.*, 1984, **56**: 29–78.

[41] Kustermans J., Vaes S., Locally compact quantum groups, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, 2000, **33**(6): 837–934.

[42] Kustermans J., Vaes S., Locally quantum groups in the von Neumann algebraic setting, *Math. Scand.*, 2003, **92**(1): 68–92.

[43] Liu Z., Exchange relation planar algebras of small rank, *Trans. Amer. Math. Soc.*, DOI: https://doi.org/10.1090/tran/6582.

[44] Liu Z., Wang S., Wu J., Young's inequality for locally compact quantum groups, *Journal of Operator Theory*, to appear, 2016.

[45] Liu Z., Wu J., From subfactors to Kac algebras: the Fourier transform, Uncertainty principles for Kac algebras, arXiv:1606.00051.

[46] Longo R., Rehren K. H., Nets of subfactors, *Reviews in Mathematical Physics*, 1995, **7**(4): 567–597.

[47] Longo R., Conformal subnets and intermediate subfactors, *Comm. Math. Phys.*, 2003, **237**(1–2): 7–30.

[48] Müger M., From subfactors to categories and topology I: Frobenius algebras in and Morita equivalence of tensor categories, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2003, **180**(1–2): 81–157.

[49] Ocneanu A., Quantized roups, string algebras and Galois theory for algebras, Operator Algebras and Applications, **2**, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **136**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, 119–172.

[50] Özaydm M., Przebinda T., An entropy-based uncertainty principle for a locally compact abelian group, *J. Funct. Anal.*, 2004, **215**: 241–252.

[51] Pisier G., Introduction to Operator Space Theory, Cambridge university press, Cambridge, 2003.

[52] Popa S., Classification of amenable subfactor of type II, *Acta Math.*, 1994, **172**: 352–445.

[53] Popa S., An axiomatization of the lattice of higher relative commutants, *Invent. Math.*, 1995, **120**: 237–252.

[54] Reshetikhin N., Turaev V., Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* 1991, **103**: 547–597.

[55] Russo B., The norm of the L^p-Fourier transform on unimodular groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, **192**: 293–305.

[56] Turaev V., Viro O. Ya., State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$-symbols, *Topology*, 1992, **31**: 865–902.

[57] Smith K. T., The uncertainty principle on groups, *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, **50**: 876–882.

[58] Szymanski W., Finite index subfactors and Hopf algebra crossed products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1994, **120**(2): 519–528.

[59] Takesaki M., Theory of Operator Algebras I, II, III, Springer, Berlin, 1979.

[60] Tao T., An uncertainty principle for cyclic groups of prime order, *Math. Res. Lett.*, 2005, **12**(1): 121–127.

[61] Tao T., Vu Van H., Additive Combinatorics, Cambridge University Press, Cambridge studies in advanced mathematics 105, 2006.

[62] Terp M., Interpolation spaces between a von Neumann algebra and its predual, *J. Operator Theory*, 1982, **8**: 327–360.

[63] Terp M., L^p spaces associated von Neumann algebras, Preprint, 1981.

[64] Vainerman L. I., Characterization of objects dual to locally compact groups, *Funct. Anal. Appl.*, 1974, **8**: 66–67.

[65] Vainerman L. I., Kac G. I., Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras, *Soviet Math. Dokl.*, 1974, **23**: 1144–1148.

[66] Vainerman L. I., Kac G. I., Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras, *Math. USSR Sbornik*, 1974, **23**: 185–214.

[67] Witten E., Topological quantum field theory, *Comm. Math. Phys.*, 1988, **117**(3): 353–386.

[68] Xu F., Symmetries of subfactors motivated by Aschbacher–Guralnick conjecture, *Adv. Math.*, 2016, **289**: 345–361.

[69] Young W. H., On the multiplication of successions of Fourier constants, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1912, **87**: 331–339.