FONCTIONS DE PRÉFÉRENCE COLLECTIVE DÉFINIES SUR DES DOMAINES DE PRÉFÉRENCE INDIVIDUELLE SOUMIS A DES CONTRAINTES

par

Eric MASKIN

Massachusetts Institute of Technology

On étudie dans ce texte la nature des contraintes qu'il est nécessaire d'imposer aux préférences individuelles pour pouvoir définir une fonction de préférence collective qui satisfasse la forme faible de la propriété de Pareto, l'indépendance vis-à-vis des choix extérieurs et l'absence de dictature. Des conditions nécessaires et suffisantes sont explicitées et appliquées à divers exemples, permettant également une réinterprétation des règles d'unanimité et de majorité (*).

Le célèbre théorème d'impossibilité d'Arrow [1] exclut tout espoir de construire une fonction de préférence collective qui satisfasse un certain nombre de conditions raisonnables dès lors que l'ensemble des alternatives ouvertes à la collectivité contient au moins trois éléments et que l'on n'exclut aucun ordre de préférence individuel qui soit logiquement possible. Dans bien des cas, cependant, il n'est pas difficile d'exclure certains de ces ordres de préférence individuels à partir de considérations a priori. Ainsi, dans un cadre économique classique où les alternatives

---

(*) Je suis très reconnaissant envers Kenneth Arrow et Frank Hahn pour les observations pertinentes et approfondies qu'ils firent à propos des différentes versions de ce texte. Parmi les autres personnes dont les suggestions me furent particulièrement utiles, citons Hugo Sonnenschein et Mark Satterthwaite.

collectives correspondent à des distributions différentes de biens entre les agents, une alternative x, qui ne diffère d'une alternative y qu'en ce qu'elle attribue à un agent une moindre quantité de chaque bien, peut parfaitement être rangée a priori par cet agent comme inférieure à y (*).

Si de tels arguments permettent d'éliminer un nombre suffisant d'ordres de préférence individuels, il peut devenir possible de construire une fonction de préférence collective qui satisfasse toutes les conditions d'Arrow (à l'exception, bien sûr, de celle qui suppose qu'il n'existe aucune contrainte sur les ordres de préférence individuels). Une telle fonction sera désormais appelée une SWF d'Arrow (SWF = Social Welfare Function). Il est bien connu qu'on peut engendrer une SWF d'Arrow en restreignant les préférences individuelles à être unimodales ([2] et [1]). L'unimodalité permet en effet à la règle ordinaire de vote à la majorité de se qualifier comme SWF d'Arrow. Sen [4] et Sen et Pattanaik [6] ont renforcé ce résultat et obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour que des règles de vote majoritaire satisfassent les conditions d'Arrow. Ce travail constitue, dans une certaine mesure, une extension de leurs résultats. En fait, notre principal résultat (théorème 4) consiste en l'énoncé de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une SWF d'Arrow sur un domaine de préférence individuelle.

Voici le plan de ce texte. Dans la première partie, nous définissons les notations et la terminologie utilisées. En particulier, nous établissons une liste des conditions qui sont le plus couramment exigées des fonctions de préférence collective. Dans la deuxième partie, nous présentons plusieurs résultats préliminaires relatifs aux SWF d'Arrow. Le plus important d'entre eux tient dans le théorème 1, selon lequel, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, il existe une SWF d'Arrow à n personnes sur un domaine donné de préférences individuelles si et seulement si il existe une SWF d'Arrow à deux personnes sur ce domaine. Ce résultat permet de réduire l'analyse au cas à deux personnes. Dans la troisième partie, nous présentons des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une SWF d'Arrow sur un domaine de préférences individuelles soumis à des contraintes (Théorème 4) ainsi qu'un corrolaire évident (le théorème d'impossibilité d'Arrow). Dans la quatrième partie, nous présentons plusieurs exemples destinés à illustrer l'utilisation de ces conditions lorsqu'on a affaire à des contraintes sur le domaine de préférences individuelles (Théorèmes 5 et 6).

(*) Pour une discussion des fonctions de préférence collective dans le contexte de l'économie, voir Maskin [7].

1. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS(*)

Soit A l'ensemble des alternatives ouvertes à la collectivité contenant au moins trois éléments. Une relation binaire S sur A est un sous-ensemble de $A \times A$. Pour tout $a, b \in A$ nous écrirons «aSb» pour signifier «$(a, b) \in S$». La restriction de S à un sous-ensemble $B (\subseteq A)$, noté «S^B» est $S \cap B \times B$). S est réflexive si, pour tout $a \in A$, aSa. Elle est transitive si aSb et bSc implique aSc pour tout $a, b, c \in A$. Pour toute proposition logique P, soit $\tilde{}P$ (lire «non P») la négation logique de P. S est asymétrique si pour tout $a, b \in A$, aSb implique $\tilde{}bSa$. S est antisymétrique si pour tout $a, b \in A$, aSb et bSa implique $a = b$. Remarquons que l'asymétrie implique l'antisymétrie. S est totale si pour tout a $b \in A$ avec $a \neq b$ soit aSb soit bSa. S est un préordre si elle est réflexive, transitive et totale. C'est un ordre fort si elle est asymétrique, transitive et complète. C'est une chaîne si c'est un préordre antisymétrique (relation d'ordre total). Si S est un préordre sur A, soit P(S) et I(S) les relations binaires définies comme suit :

$$\forall a, b \in A \ , \ a\mathrm{P}(S)b \quad \textit{ssi} \quad aSb \text{ et } \tilde{}bSa$$

$$\forall a, b \in A \ , \ a\mathrm{I}(S)b \quad \textit{ssi} \quad aSb \text{ et } bSa.$$

On vérifie aisément que P(S) est asymétrique, I(S) réflexive, et que ces deux relations sont transitives. P(S) sera appelée la *relation stricte* et I(S) la *relation d'indifférence* pour S. Si S est un préordre sur $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq A$ alors nous notons $S = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$ si $b_1 \mathrm{P}(S)\, b_2 \mathrm{P}(S) \ldots \mathrm{P}(S)\, b_m$. De même,

$$S(P^K) = \langle b_{K+1}, b_{K+2}, \ldots, b_m, b_1, b_2, \ldots, b_K \rangle,$$

pour tout entier positif K et $S^{-1} = \langle b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1 \rangle$.

Soit $\mathcal{R}_A$ la classe de tous les ordres sur les éléments de A. Pour toute sous-classe $\mathcal{R} \subseteq (\mathcal{R}_A)$ et tout entier positif $n (\geqslant 2)$ on définit une fonction de préférence collective f sur le domaine restreint comme la correspondance

$$f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_A$$

où $\mathcal{R}^n$ est le $n^{\text{ième}}$ produit cartésien de $\mathcal{R}$. L'interprétation de f est la suivante. Un n-uple de préordres $(R_1, \ldots, R^n)$ peut être considéré comme un profil de préférences individuelles. R_i correspond au pré-

(*) Notre terminologie en ce qui concerne les relations correspond pour la plus grande part à celle de Sen [5].

ordre de préférence du $i^{ème}$ individu, et l'expression «aR_ib» correspond à l'expression «a est au moins aussi désirable que b pour l'individu i avec les préférences R_i». Une fonction de préférence collective assigne à chaque profil de préférences individuelles un préordre de préférence collective.

Nous remarquons que notre définition n'est évidemment pas la définition la plus générale d'un domaine restreint. En général le domaine d'une fonction de préférence collective à n personnes peut être n'importe quelle sous-classe de $\mathcal{R}^n_A$ et non simplement ceux qui peuvent s'exprimer sous forme de produit cartésien. Dans de nombreuses applications, il peut être cependant raisonnable de supposer que, a priori, les préférences individuelles sont mutuellement indépendantes et restreintes à la même sous-classe, auquel cas notre formulation est appropriée. C'est de plus l'approche habituellement suivie dans la littérature.

Suivent toutes les propriétés qui sont souvent exigées des fonctions de préférence collective $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_A$.

Propriété de Pareto faible (P) : $\forall\{a,b\} \subseteq A$, $\forall(R_1,\dots,R_n) \in \mathcal{R}^n$, si $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ $aP(R_i)b$, alors $aP(f(R_1,\dots,R_n))b$.

Propriété de Pareto forte (P*) : $\forall\{a,b\} \subseteq A$, $\forall(R_1,\dots,R_n) \in \mathcal{R}^n$ si $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ aR_ib, alors $af(R_1,\dots,R_n)b$ et si, en plus

$$\exists j \in \{1,\dots,n\} \quad \text{tel que} \quad aP(R_j)b.$$

alors $aP(f(R_1,\dots,R_n))b$.

Indépendance des choix extérieurs (IIA = Independence of Irrelevant Alternatives) $\forall\{a,b\} \subseteq A$ $\forall(R_1,\dots,R_n)$, $(R' \dots, R'_n) \in \mathcal{R}^n$, si $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ aR_ib ssi aR'_ib et bR_ia ssi bR'_ia, alors aRb ssi $aR'b$ et bRa ssi $bR'a$, où $R = f(R_1,\dots,R_n)$ et $R' = f(R'_1,\dots,R'_n)$ (*).

Une condition habituelle qui inclut IIA est :

Neutralité (N) : $\forall(a,b,c,d) \in A$, $\forall(R_1,\dots,R_n)$, $(R'_1,\dots,R'_n) \in \mathcal{R}^n$ si $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ (aR_ib ssi cR'_id) et (bR_ia ssi dR'_ic), alors ($af(R_1,\dots,R'_n)b$ ssi $cf(R'_1,\dots,R'_n)d$) et ($bf(R_1,\dots,R_n)a$ ssi $df(R'_1,\dots,R')c$)(**).

Habituellement on impose une condition de non dictature aux SWF. Un dictateur est un individu dont les préférences strictes sont toujours reflétées par les préférences collectives. Si, malgré tout, $\mathcal{R}$ est un domaine tel que $\forall\{a,b\} \subseteq A$ $aP(R_0)b$ pour certains $R_0 \subseteq \mathcal{R}$ implique aRb pour tout $R \subseteq \mathcal{R}$, alors la présence d'un dictateur n'est pas

(*) Ceci est la définition «relationnelle» de IIA par opposition à la formulation en terme d'ensemble de choix de Arrow. Les deux définitions sont d'ailleurs équivalentes (voir Sen [5]).

(**) La neutralité peut aussi être formulée de telle sorte qu'elle n'implique pas IIA. Dans la définition ci-dessus, remplacer simplement R'_i par R_i.

particulièrement choquante. En vérité, sur un tel domaine chaque individu est un dictateur si on invoque la forme forte du principe de Pareto. Nous proposons donc les définitions suivantes :

Définition : Un couple $\{a, b\} \in A$ est *non-trivial* par rapport à $\mathcal{R}$ si $\exists R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ tel que $aP(R_1)b$ et $bP(R_2)a$.

Soit $N(\mathcal{R})$ l'ensemble des couples *non triviaux* dans A. $\mathcal{R}$ sera dit non-trivial si $N(\mathcal{R}) \neq \phi$.

Non-dictature (ND) : Si $\mathcal{R}$ est non trivial, alors il n'existe pas de $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\forall (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}$ $\forall \{a, b\} \subseteq A$, $aP(R_i)b$ implique $aP(f(R, \ldots, R_n)b$. Un renforcement habituel de cette condition est l'anonymat.

Anonymat (A) : Si σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et pour $(R_1, \ldots, R_n)$, $(R'_1, \ldots, R'_n) \in \mathcal{R}^n$, $(R_1, \ldots, R_n) = (R'_{\sigma(1)}, \ldots, R'_{\sigma(n)})$ alors $f(R_1, \ldots, R_n) = f(R'_1, \ldots, R'_n)$. Plus fort que ND mais plus faible que A est la non-dictature sur un sous-ensemble $B \subseteq A$.

Non-dictature sur $B (\subset A)$: Soit $\mathcal{R}^B = \{R^B | R \in \mathcal{R}\}$. Définissons $f_B : (\mathcal{R}^B)^n \to \mathcal{R}^B$ telle que $f_B(R_1^B, \ldots, R_n^B) = f(R_1, \ldots, R_n)$, alors f_B satisfait ND.

Les trois propriétés suivantes tentent, à des degrés divers, d'exprimer l'idée que si certains individus modifient leurs préférences en faveur de l'alternative a par rapport à b, alors a ne devrait pas être défavorisé par rapport à b dans la préférence collective.

Association positive des valeurs (PA) : $\forall a \in A$, $\forall (R_1, \ldots, R_n)$, $(R'_1, \ldots, R'_n) \in \mathcal{R}^n$ si

(1) $\forall c \in A$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ aR_ic implique aR'_ic et $aP(R_i)c$ implique $aP(R'_i)c$

(2) $\forall b, c \in A/\{a\}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ bR_ic ssi bR'_ic, alors $\forall b \in A$ $aP(fR_1, \ldots, R_n))b$ implique $aP(f(R'_1, \ldots, R'_n))b$.

Résonance non négative (NNR = Non-negative Responsiveness).

$\forall a \in A$ $\forall (R_1, \ldots, R_n)$, $(R'_1, \ldots, R'_n) \in \mathcal{R}^n$, si les conditions (1) et (2) de la définition de PA tiennent, alors $aI(f(R_1, \ldots, R_n))b$ implique $aI(f(R'_1, \ldots, R'_n))b$, et $aP(f(R_1, \ldots, R_n))b$ implique $aP(f(R'_1, \ldots, R'_n))b$.

Monotonicité (M) : $\forall \{a, b\} \subseteq A$ $\forall \{(R_1, \ldots, R_n), (R'_1, \ldots, R'_n)\} \subseteq \mathcal{R}^n$,

si (1) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ aR_ib implique aR'_ib

(2) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $a\mathrm{P}(\mathrm{R}_i)b$ implique $a\mathrm{P}(\mathrm{R}'_i)b$ alors $af(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n)b$ implique $af(\mathrm{R}'_1, \ldots, \mathrm{R}'_n)b$ et $a\mathrm{P}(f(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n))b$ implique

$a\mathrm{P}(f(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}'_n))b$ (*).

Remarquons que (NNR) est un peu plus forte que (PA) à cause de la condition supplémentaire concernant le cas d'indifférence. M, par contre, est plus forte que NNR et en fait implique IIA. Cependant, quand PA et NNR sont associées avec IIA sur des domaines sans contraintes, les trois propriétés sont équivalentes (**).

Proposition 1 : Si f est une SWF à n personnes sur $\mathcal{R}_\mathrm{A}$ qui satisfait IIA, alors f satisfait PA si et seulement si elle satisfait M.

Démonstration : Si f satisfait M, elle satisfait évidemment PA. Supposons que f vérifie PA et IIA sur $\mathcal{R}_\mathrm{A}$. Si f ne satisfait pas M, il existe $\{a, b\} \subseteq \mathrm{A}$, $\{\mathrm{R}^1_1, \ldots, \mathrm{R}^1_n)$, $(\mathrm{R}^2_1, \ldots, \mathrm{R}^2_n) \subseteq \mathcal{R}^n_\mathrm{A}$ tels que (1) et (2) de la définition de M sont vérifiées et encore soit

(1) $a\mathrm{I}(f(\mathrm{R}^1_1, \ldots, \mathrm{R}^1_n))b$ et $b\mathrm{P}(f(\mathrm{R}^2_1, \ldots, \mathrm{R}^2_n))a$

soit

(2) $a\mathrm{P}(f(\mathrm{R}^1_1, \ldots, \mathrm{R}^1_n))b$ et $bf(\mathrm{R}^2_1, \ldots, \mathrm{R}^2_n)a$.

Si (1) est vérifiée, choisissons $(\mathrm{R}^3_1, \ldots, \mathrm{R}^3_n)$, $(\mathrm{R}^4_1, \ldots, \mathrm{R}^4_n) \in \mathcal{R}^n_\mathrm{A}$ tels que

(3) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, R^1_i et R^2_i classent a et b de la même façon, et R^2_i et R^4_i classent a et b de la même façon.

(4) $\forall c \in \mathrm{A}/\{a, b\}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n)$ $b\mathrm{R}^3_i c$ implique $b\mathrm{R}^4_i c$ et $b\mathrm{P}(\mathrm{R}^3_0)c$ implique $b\mathrm{P}(\mathrm{R}^4_i)c$.

(5) $\forall \{c, d\} \subseteq \mathrm{A}/\{b\}$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $c\mathrm{R}^3_i d$ ssi $c\mathrm{R}^4_i d$. D'après (1), (3) et IAA, $a\mathrm{I}(f(\mathrm{R}^4_1, \ldots, \mathrm{R}^4_n))b$ et $b\mathrm{P}(f(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n))a$. Mais ce dernier résultat ne vérifie pas (4) et (5) parce que f vérifie PA ; donc f vérifie M. Le raisonnement est similaire si (2) est vérifiée.

C.Q.F.D.

Nous appellerons *fonctions de préférence collective à n-personnes d'Arrow* (SWF d'Arrow), toute fonction de préférence collective à n-personnes qui satisfait P, IIA, et ND. La raison de cette définition est que ce sont ces propriétés qui, comme l'a montré Arrow, sont, ensemble,

---

(*) La propriété M est, parfois, appelée NNR (voir Sen [5]).

(**) L'équivalence ne tient pas nécessairement sur des domaines restreints. En général, M est plus fort que IIA et NNR combinées.

incompatibles avec l'existence d'une SWF sur $\mathcal{R}_A$ (*). Notre premier objectif sera de caractériser ces domaines qui admettent des SWF d'Arrow à n-personnes (**). Pour des raisons de simplicité technique, une partie de cette étude ne portera que sur le cas où les préférences individuelles sont des chaînes (i.e. les classes d'indifférence sont des singletons)(***).

Ce cas n'est pas sans intérêt par lui-même. Par exemple dans un modèle économique avec des indivisibilités, il peut être raisonnable de supposer qu'il n'y a pas deux complexes distincts de biens qui procurent exactement la même satisfaction à un individu.

2. RESULTATS PRELIMINAIRES

Soient A et $\mathcal{R}$ définis comme précédemment, nous commençons par une définition.

Omission : Pour tout triplet d'alternatives $\{a, b, c\} \subseteq A$, nous dirons que $\{a, b, c\}$ est omis de $\mathcal{R}$ si il n'existe pas $R \in \mathcal{R}$ tel que $a P(R)$ $b P(R) c$.

Les deux lemmes suivants sont utilisés dans la démonstration du théorème 1.

Lemme 1. – Pour A défini comme précédemment et $\mathcal{R}$ ne comprenant que des chaînes, s'il existe une chaîne Q sur A telle que, pour tout $\{a, b, c\} \subseteq A$ $a P(Q)$ $b P(Q) c$ implique que soit $\langle b, c, a \rangle$ soit $\langle c, a, b \rangle$ est omis de $\mathcal{R}$, alors il existe une SWF d'Arrow à 2 personnes sur $\mathcal{R}$.

Démonstration : Elle se fait par construction explicite. Supposons que Q a la propriété ci-dessus. Pour $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, construisons une rela-

(*) Dans la formulation première de Arrow, la propriété de Pareto était omise et remplacée par la souveraineté du citoyen (pour tout couple d'alternatives a et b, il y a un profil tel que le préordre collectif classe a au-dessus de b), et PA. On peut montrer facilement que la souveraineté du citoyen et PA ensembles impliquent P. Par conséquent, la formulation d'origine est équivalente à supposer P, ND, IIA et PA. Nous montrerons plus loin que les conditions d'existence d'une SWF d'Arrow sont les mêmes que PA soit supposée ou non.

(**) Nous choisissons d'imposer seulement P, IIA et ND parce qu'elles semblent être parmi les moins discutables des propriétés habituelles. Dans une version précédente de ce texte [8], par exemple, ND était remplacée par la condition plus forte d'anonymat. Ceci soulevait l'objection que dans de nombreux cas, parmi lesquels les modèles économiques qui ne comprennent que des biens privés, la condition d'anonymat n'est pas appropriée (voir Maskin [7]).

(***) Si les préordres individuels sont les chaines, P et P* sont naturellement équivalents.

tion binaire de la façon suivante : Pour tout $a \in A$, prenons $af(R_1, R_2)a$. Si pour $a, b \in A$, $aP(Q)b$ alors prenons $aP(f(R_1, R_2))b$ à moins que l'on ait à la fois $bP(R_1)a$ et $bP(R_2)a$, auquel cas on prendra $bP(f(R_1, R_2))a$. La correspondance sur $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, $(R_1, R_2) \to f(R_1, R_2)$ satisfait évidemment IIA et P. De plus, elle satisfait AN et donc trivialement ND (*). Il reste à montrer que $f(R_1, R_2) \in \mathcal{R}_A$. De façon évidente, $f(R_1, R_2)$ est complète et antisymétrique. Nous devons montrer seulement qu'elle est transitive. Considérons $\{a, b, c\} \subseteq A$. Supposons $aP(f(R_1, R_2))b$ et $bP(f(R_1, R_2))c$. Alors soit

$$aP(R_i)b \text{ pour } i = 1, 2 \tag{6}$$

soit $$aP(R_j)b \text{ pour } j \in \{1, 2\} \text{ et } aP(Q)b. \tag{7}$$

De plus, soit

$$bP(R_i)c \text{ pour } i = 1, 2 \tag{8}$$

soit $$bP(R_j)c \text{ pour un } j \text{ et } bP(Q)c. \tag{9}$$

Supposons que (6) et (8) soient vraies, par transitivité des préférences individuelles, $aP(R_i)c$ pour $i = 1, 2$, ainsi $aP(f(R, R))c$.

Supposons que (6) et (9) soient vérifiées, pour un j, $aP(R_j)b\ P(R_j)c$. Supposons $j = 1$, alors $aP(R)c$. Si $cP(f(R_1, R_2))a$, nous devons avoir $cP(Q)q$ et $cP(R_2)a$ et alors, $cP(R_2)\ aP(R_2)b$, $bP(Q)\ cP(Q)a$; mais par hypothèse, $bP(Q)\ cP(Q)a$ implique que $\langle c, a, b\rangle$ ou $\langle a, b, c\rangle$ est omis, contredisant nos conclusions sur R_1 et R_2 ; donc $aP(f(R_1, R_2))c$.

Supposons que (7) et (8) soient vérifiées, de nouveau $aP(R_j)\ bP(R_j)c$ pour un $j \in \{1, 2\}$. Prenons $j = 1$; si $cP(f(R_1, R_2))a$, nous avons, par construction, $cP(R_2)a$ et $cP(Q)q$; ainsi, $bP(R_2)\ cP(R_2)a$ et $cP(Q)\ aP(Q)b$. Cette dernière impliquant que $\langle a, b, c\rangle$ ou $\langle b, c, a\rangle$ soit omis, ce qui contredit R_1 et R_2, donc $aP(f(R_1, R_2))c$.

Supposons que (7) et (9) soient vérifiées, par transitivité, $aP(Q)c$; d'après (7) et par symmétrie, nous pouvons supposer $aP(R_1)b$. Si $cP(f(R_1, R_2))a$, alors $cP(R_1)a$ et $cP(R_2)a$. Donc, d'après (9), $cP(R_1)\ aP(R_1)b$ et $bP(R_2)\ cP(R_2)a$, ce qui contredit notre hypothèse sur Q, donc $aP(f(R_1, R_2))c$.

Dans tous les cas, $aP(f(R_1, R_2))c$, ce qui établit la transitivité.

C.Q.F.D.

(*) Nous n'avons pas encore établi que $f(R_1, R_2)$ est un préordre, mais remarquons que les propriétés P, IIA, A et ND sont bien définies dès que $f(R_1, R_2)$ est une relation binaire.

Lemme 2. — Soit $\mathcal{R}$ un domaine ne comprenant que des chaines ; pour tout $(R_1, R_2, R_3) \in \mathcal{R}^3$, soit $F(R_1, R_2, R_3)$ la relation binaire définie sur A telle que $\forall (a, b) \subseteq A$, $aF(R_1, R_2, R_3)b$ ssi $\# \{i/aR_ib\} \in \{1, 3\}$.(*)

Si la correspondance F est une fonction de préférence collective à 3 personnes, alors que tous les triplets $\{a, b, c\} \subseteq A$, au moins un élément de chacun des groupes cycliques $\{\langle a, b, c\rangle, \langle b, c, a\rangle, \langle c, a, b\rangle\}$ et $\{\langle a, c, b\rangle, \langle c, b, a\rangle, \langle b, a, c\rangle\}$ est omis de $\mathcal{R}$.

Démonstration : Supposons que pour $\mathcal{R}$, F est une fonction de préférence collective ; alors $\forall (R_1, R_2, R_3) \in \mathcal{R}^3$, $F(R_1, R_2, R_3)$ est un préordre. Pour $B = (a, b, c) \subseteq A$, choisissons $R_a, R_b, R_c \in \mathcal{R}$ de sorte que $R_a^B = \langle a, b, c\rangle$, $R_b^B = \langle b, c, a\rangle$ et $R_c^B = \langle c, a, b\rangle$. Considérons l'ensemble (R_a, R_b, R_c). Remarquons que $aF(R_a, R_b, R_c)$ $bF(R_a, R_b, R_c)c$; donc l'un des $\langle a, b, c\rangle$, $\langle b, c, a\rangle$ et $\langle c, a, b\rangle$ doit être omis. Pour compléter la démonstration, permuter b et c dans le raisonnement précédent.

C.Q.F.D.

Nous introduisons les définitions suivantes :

Oligarchie : Si $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_A$ est une fonction de préférence collective à n personnes sur $\mathcal{R}(\subseteq \mathcal{R}_A)$ et $\mathcal{R}$ est non-trivial, alors un sous-ensemble $G = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ constitue une oligarchie à m personnes par rapport à f si $\forall \{a, b\} \subseteq N(\mathcal{R})$, $\forall (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$, $(\forall j \in G\ aP(R_j)b)$ implique $aP(f(R_1, \ldots, R_n))b$.

Remarquons qu'une oligarchie à une personne est un dictateur.

Dictature partielle : Si $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_1$ est une SWF à n personnes et $\mathcal{R}$ est non trivial, alors un individu $i \in \{1, \ldots, n\}$ est un dictateur partiel par rapport à $H \subseteq \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ si $\forall \{a, b\} \subseteq A$ $\forall (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ $(\forall j, k \in H, R_j = R_k)$ implique $(aP(R_i)b)$ implique $aP(f(R_1, \ldots, R_n))b)$.

En gros, l'individu i est un dictateur partiel par rapport à H s'il est un dictateur chaque fois que les membres de H sont tous d'accord.

Nous allons montrer maintenant qu'il suffit de considérer seulement les SWF d'Arrow à 2 personnes (**).

Théorème 1 : Pour un domaine restreint $\mathcal{R}(\subseteq \mathcal{R}_A)$ comprenant seulement des chaines et pour tout entier $n \geqslant 2$ il existe une SWF

(*) Pour tout ensemble Z, «#(Z)» signifie le cardinal de Z.

(**) Je suis redevable à Kenneth Arrow qui m'a signalé l'intérêt des dictateurs partiels pour le raisonnement suivant.

d'Arrow à n personnes sur $\mathcal{R}$ ssi il existe une SWF d'Arrow à deux personnes sur $\mathcal{R}$.

Démonstration : Si $\mathcal{R}$ est trivial, le résultat est immédiat. Supposons que $\mathcal{R}$ est non-trivial. Supposons que f_2 est une SWF d'Arrow à 2 personnes sur $\mathcal{R}$. Définissons une SWF à n personnes :

$$f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_A \text{ telle que } \forall (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n, \quad f_n(R_1, \ldots, R_n) = f_2(R_1, \ldots, R_n).$$

On vérifie aisément que f_n satisfait P, IIA, et ND. Pour traiter l'implication dans l'autre sens, supposons que $f_n : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}_A$ est une SWF d'Arrow à n personnes.

Supposons d'abord que $n \geqslant 4$, nous affirmons qu'il existe un sous-ensemble $H \subseteq \{1, \ldots, n\}$ avec $\#(H) = 2$ tel que H n'est pas une oligarchie par rapport à f_n. Cette assertion est vraie parce que si G est une oligarchie à 2 personnes, alors $J = \{1, \ldots, n\}$ G n'est pas une oligarchie et puisque $\#(H) \geqslant 2$ tout sous-ensemble de J à deux éléments est non oligarchique. Pour simplifier, supposons $H = \{n-1, n\}$. Si aucun individu dans $\{1, \ldots, n-2\}$ n'est un dictateur partiel par rapport à H, construisons $f_{n-1} : \mathcal{R}^{n-1} \to \mathcal{R}_1$ telle que :

$$\forall (R_1, \ldots, R_{n-1}) \in \mathcal{R}^{n-1}] \; [f_{n-1}(R_1, \ldots, R_{n-1}) = f_n(R_1, \ldots, R_{n-1}, R_{n-1}).$$

On peut facilement vérifier que f_{n-1} satisfait P et IIA. Nous pouvons dire que f_{n-1} est obtenue à partir de f_n en réduisant les individus $n-1$ et n en un seul individu. Aucun individu $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ n'est un dictateur pour f_{n-1} parce que par hypothèse i n'est pas un dictateur partiel pour f_n par rapport à H. L'individu $n-1$ n'est pas un dictateur pour f_{n-1} parce que H n'est pas une oligarchie pour f_n. Par conséquent f_{n-1} satisfait ND et est une SWF d'Arrow. Supposons que d'un autre côté un individu, disons l'individu 1, est un dictateur partiel pour f_n par rapport à H. D'abord remarquons que 1 est le seul dictateur partiel par rapport à H (pour la même raison qu'il ne peut y avoir au plus qu'un dictateur). Maintenant bien que 1 soit un dictateur partiel, il n'est pas un dictateur à part entière pour f_n. Par conséquent, il existe un couple $\{a, b\} \in N(\mathcal{R})$ sur lequel 1 n'est pas un dictateur. Le raisonnement envisage maintenant deux cas :

Cas I : $\exists j \in \{2, \ldots, n-2\}$ tel que $\{1, j\}$ n'est pas une oligarchie. Sans perte de généralité, supposons que $j = 2$. Construisons f^*_{n-1} à partir de f_n en réduisant les individus 1 et 2 en un seul individu. Choisissons $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}$ tel que $R_1 = R_2, R_{n-1} = R_n$, $aP(R_1)b$, et $aP(R_k)b$ pour tout $k > 2$. Parce que 1 est un dictateur partiel pour f_n par rapport à $\{n-1, n\}$, nous devons avoir $aP(f_n(R_1, \ldots, R_n))b$ et donc $aP(f^*(R_2, \ldots, R_n))b$. Par conséquent aucun individu $t > 1$

n'est un dictateur pour f_{n-1}^{*}. L'individu 1 (formé par la réduction des individus 1 et 2 de f_n) n'est pas un dictateur parce que $\{1,2\}$ n'est pas une oligarchie. Par conséquent, f_{n-1}^{*} est une SWF d'Arrow.

Cas II : $j \in \{2,\ldots,n-2\}$, $\{1,j\}$ est une oligarchie. Parce que 1 est un dictateur sur $\{a,b\}$, il existe $(\widetilde{R}_1,\ldots,\widetilde{R}_n) \in \mathcal{R}^n$ tel que $aP(\widetilde{R}_1)b$ et cependant $bf(\widetilde{R}_1,\ldots,\widetilde{R}_n)a$ (avec a et b pouvant permuter). Comme $\#\{2,\ldots,n\} \geqslant 3$, soit ($a$) il existe $\{j,k\} \subseteq \{2,\ldots,n\}$ tel que $\widetilde{R}_j^{\{a,b\}} = \widetilde{R}_j^{\{a,b\}}$. Si ($a$) est vérifiée, réduisons j et k en un seul individu pour construire f_{n-1}^{**}. Numérotons les individus de f_{n-1}^{**} de façon que 1 de f_n^{*} corresponde à 1 de f_{n-1}^{**}. Le fait qu'aucun individu autre que 1 puisse être un dictateur pour f_{n-1}^{**} peut être vu en considérant l'ensemble $(R_1',\ldots,R_n')$ où $R_2' = \ldots = R_n'$, $aP(R_1')b$, et $bP(R_2')a$. Puisque 1 est un dictateur partiel pour f_n par rapport à $\{n-1,n\}$, nous avons $aP(f(R_1',\ldots,R_n'))b$. Ainsi aucun individu autre que 1 ne peut toujours faire valoir sa volonté dans la préférence collective portant sur a et b et ceci naturellement reste vrai quand j et k sont réduits. 1 n'est pas plus un dictateur pour f_{n-1}^{**}. Nous avons vu que 1 fait prévaloir sa volonté sous f_n si on a $(\widetilde{R}_1,\ldots,\widetilde{R}_n)$. Si maintenant, on réduit j et k (rappelons que $R_j^{\{a,b\}} = R_k^{\{a,b\}}$) : d'après IAA, nous pouvons supposer que $R_j = R_k$, de sorte que l'ensemble des préférences peut être réduit, alors 1 ne fait plus prévaloir sa volonté. Si (b) est vérifiée, agrégeons 1 et q pour construire f_{n-1}^{***}. L'individu formé à partir de 1 et q n'est pas un dictateur pour f_{n-1}^{***} parce que 1 et q ne voient pas leurs préférences pour a et b reflétées par la préférence collective quand on a $(\widetilde{R}_1,\ldots,\widetilde{R}_n)$ (nous pouvons réduire $(\widetilde{R}_1,\ldots,\widetilde{R}_n)$ parce que par hypothèse, $\widetilde{R}_1^{\{a,b\}} = \widetilde{R}_q^{\{a,b\}}$ et donc d'après IAA nous pouvons supposer $\widetilde{R}_1 = \widetilde{R}_q$), et par conséquent l'individu réduit ne fait pas prévaloir sa volonté. Considérons $h \in \{2,\ldots,n\}\backslash\{q\}$. Choisissons $(R_1'',\ldots,R_n'') \in \mathcal{R}^n$ tel que $\forall t \neq h \ R_t'' = R_1''$, $aP(R_1'')b$ et $bP(R_h'')a$. Si $h \notin \{n-1,n\}$, alors $R_1'' = R_{n-1}'' = R_n''$ et puisque 1 est un dictateur partiel par rapport à $\{n-1,n\}$ pour f_n, $aP(f_n(R_1'',\ldots,R_n''))b$. Par conséquent, dans ce cas, l'individu correspondant à h ne fait pas prévaloir sa volonté sans f_{n-1}^{***} Si $h \in (n-1,n)$, alors l'ensemble $\{2,\ldots,n-2\}\backslash\{h\}$ n'est pas vide, ainsi $\{1,\ldots,n-2\}$ constitue une oligarchie pour f_n (rappelons que par l'hypothèse du cas II, $\forall s \in \{2,\ldots,n-2\}$, $\{1,1\}$ est une oligarchie). Ainsi nous concluons encore que $aP(f_n(R_1'',\ldots,R_n''))b$, et par conséquent l'individu correspondant à h ne fait pas toujours prévaloir sa volonté sous f_{n-1}^{***}.

En appliquant les raisonnements précédents de façon itérative, il est clair que pour $n \geqslant 4$, s'il existe une SWF d'Arrow à n personnes sur $\mathcal{R}$, il existe une SWF d'Arrow à 3 personnes sur $\mathcal{R}$. Supposons donc que $n = 3$. Si tous les sous-ensembles à 2 personnes de $\{1,2,3\}$

sont oligarchiques par rapport à f_3, choisissons $\{a,b\} \in N(\mathcal{R})$ et $R \in \mathcal{R}$ tel que $aP(R)b$. Définissons $f_2 : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}_A$ telle que pour tout $(R_1, R_2) \in \mathcal{R}$, $f_2(R_1, R_2) = f_3(R_1, R_2, R)$. Il est évident que f_2 satisfait IIA. f_2 satisfait P parce que $\{1, 2\}$ constitue une oligarchie pour f_3. Choisissons $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ tels que $bP(R_1)a$ et $R_2 = R_1$. Puisque $\{2, 3\}$ constitue une oligarchie pour f_3, $aP(f_3(R_1, R_2, R))b$. Donc $aP(f_2(R_1, R_2))b$; ainsi l'individu 1 n'est pas un dictateur pour f_2. De même l'individu 2 n'est pas un dictateur pour f_2 et nous concluons que f_2 est une SWF d'Arrow à 2 personnes. Finalement, supposons qu'un sous-ensemble à 2 personnes de $\{1, 2, 3\}$ n'est pas oligarchique par rapport à f_3. Sans perte de généralité supposons que $\{2, 3\}$ n'est pas oligarchique. Maintenant si 1 est un dictateur partiel par rapport à $\{2, 3\}$, nous pouvons réduire 2 et 3 pour construire une SWF d'Arrow à deux personnes, complétant ainsi la démonstration. Supposons donc que l'individu 1 est un dictateur partiel. Puisque l'individu 1 n'est pas un dictateur à part entière pour f_3, il existe $\{a,b\} \in N(\mathcal{R})$ et $(R_1^*, R_2^*, R_3^*) \in \mathcal{R}^n$ tels que $aP(R_1^*)b$ mais $bf_3(R_1^*, R_2^*, R_3^*)a$.

Maintenant puisque 1 est un dictateur partiel par rapport à $\{2, 3\}$, $R_2^{*\{a,b\}} \neq R_3^{*\{a,b\}}$. Sans perte de généralité supposons que $bP(R_3^*)a$. Si $\{1, 2\}$ est une oligarchie pour f_3, alors la SWF à 2 personnes $f_2^*: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}_A$ définie telle que $\forall (R_1, R_2) \in \mathcal{R}^2$ $f_2^*(R_1, R_2) = f_3(R_1, R_2, R_3^*)$. est une SWF d'Arrow. ($f_2^*$ satisfait P parce que $\{1, 2\}$ est une oligarchie pour f_3. 1 n'est pas un dictateur parce que $bf_2^*(R_1^*, R_2^*)a$. 2 n'est pas un dictateur parce que $aP(f_2^*(R_1^*, R_3^*))b$ puisque 1 est un dictateur partiel pour f_3). Nous supposerons donc que $\{1, 2\}$ n'est pas une oligarchie. Mais alors nous pensons réduire 1 et 2 pour construire une SWF d'Arrow à deux personnes pour compléter la démonstration, à moins que 3 soit un dictateur partiel par rapport à $\{1, 2\}$ pour f_3. De même nous pouvons construire $f_2^{**}(R_1, R_3) = f_3(R_1, R_2^*, R_3)$ (si $\{1, 3\}$ est une oligarchie) ou à moins que l'individu 2 ne soit un dictateur partiel, réduire 1 et 3 (si $\{1, 3\}$ n'est pas une oligarchie) pour compléter la démonstration. Il nous reste donc le cas où les individus 1, 2 et 3 sont tous des dictateurs partiels par rapport à leurs compléments. Le lecteur peut facilement vérifier que ceci signifie que la SWF f_3 est la correspondance F définie dans le lemme 2. Choisissons $Q \in R$. Considérons le triplet $B = \{a, b, c\} \subseteq A$. Si $Q^B = \langle a, b, c \rangle$, alors d'après le lemme 2 soit $\langle b, c, a \rangle$ soit $\langle c, a, b \rangle$ est omis de $\mathcal{R}$. Donc par le lemme 1, il existe une SWF d'Arrow à deux personnes.

C.Q.F.D.

Corollaire : Soit A défini comme précédemment, soit $\mathcal{R}$ n'importe quelle sous-classe de $\mathcal{R}_A$. Alors pour tout $n \geqslant 2$, il existe sur $\mathcal{R}$ une SWF d'Arrow à n personnes satisfaisant M ssi il existe sur $\mathcal{R}$ une SWF d'Arrow à 2 personnes satisfaisant M.

Démonstration : Une fois de plus, le résultat est immédiat si $\mathcal{R}$ est triviale, aussi supposons-la non-triviale. La construction de f_n à partir de f_2 se fait comme précédemment. Le lecteur peut vérifier que pour $n \geqslant 4$, la construction de f_{n-1} à partir de f_n dans la démonstration du théorème 1 préserve M, et de plus ne dépend que du fait que les éléments de $\mathcal{R}$ sont des chaines ; de plus, si tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3\}$ sont des oligarchies, nous pouvons raisonner comme précédemment. Supposons donc qu'un sous-ensemble de deux personnes, disons $\{2, 3\}$ soit non oligarchique pour f_3. Si 1 n'est pas un dictateur partiel par rapport à $\{2, 3\}$, nous pouvons réduire 2 et 3 pour compléter la démonstration. Donc, supposons que l'individu 1 est un dictateur partiel. Comme l'individu 1 n'est pas un dictateur à part entière pour f_3, il existe un couple $\{a, b\} \in \mathrm{N}(\mathcal{R})$ et $(\mathrm{R}_1^*, \mathrm{R}_2^*, \mathrm{R}_3^*) \in \mathcal{R}^n$ tels que $a\mathrm{P}(\mathrm{R}_1^*)b$ mais $bf_3(\mathrm{R}_1^*, \mathrm{R}_2^*, \mathrm{R}_3^*)$. Maintenant puisque 1 est un dictateur partiel par rapport à $\{2, 3\}$, nous devons avoir $(\mathrm{R}_2^*)^{\{a,b\}} \neq (\mathrm{R}_3^*)^{\{a,b\}}$. Sans perte de généralité, supposons que $\sim a\mathrm{I}(\mathrm{R}_3^*)b$. Si $\{1, 2\}$ est une oligarchie pour f_3, définissons alors la SWF à deux personnes $f_2^* = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}_\mathrm{A}$ telle que pour tout $(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) \in \mathcal{R}^2$, $f_2^*(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = f_3(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3^*)$. Il est immédiat que PA, NNR et M sont préservés par la construction. f_2^* satisfait P parce que $\{1, 2\}$ est par hypothèse une oligarchie. L'individu 1 n'est pas un dictateur, parce que $bf_2^*(\mathrm{R}_1^*, \mathrm{R}_2^*)a$ et $a\mathrm{P}(\mathrm{R}_1^*)b$. Choisissons $\mathrm{R}_1^0 \in \mathcal{R}$ telle que $\sim (a\mathrm{I}(\mathrm{R}_1^0)b)$ et $(\mathrm{R}_1^0)^{\{a,b\}} \neq (\mathrm{R}_3^*)^{\{a,b\}}$. Dans le préordre collectif $f_3(\mathrm{R}_1^0, \mathrm{R}_3^*, \mathrm{R}_3^*)$, l'individu 1 fait prévaloir sa volonté (parce que 1 est un dictateur partiel par rapport à $\{2, 3\}$) et donc 2 ne fait pas prévaloir sa volonté entre a et b (remarquer que 2 a une préférence stricte entre a et b). De même, 2 ne fait pas prévaloir sa volonté entre a et b dans $f_2^*(\mathrm{R}_1^0, \mathrm{R}_3^*)$. Par conséquent, 2 n'est pas un dictateur pour f_2^* et f_2^* est une SWF d'Arrow. Ainsi nous supposerons que $\{1, 2\}$ n'est pas une oligarchie pour f_3. Maintenant si l'individu 3 n'est pas un dictateur partiel par rapport à $\{1, 2\}$, nous pourrons réduire 1 et 2 pour terminer la démonstration. Si malgré tout 3 est un dictateur partiel, nous avons alors la contradiction suivante : choisissons $\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b \in \mathcal{R}$ telle que $a\mathrm{P}(\mathrm{R}_a)b$ et $b\mathrm{P}(\mathrm{R}_b)a$. Alors :

$$a\mathrm{P}(f_3(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b, \mathrm{R}_b))b \quad \text{(parce que 1 est un dictateur partiel)} \tag{8}$$

$$b\mathrm{P}(f_3(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b))a \quad \text{(parce que 3 est un dictateur partiel).} \tag{9}$$

Mais la transition de (8) à (9) est une violation de M. Par conséquent l'individu 3 ne peut pas être un dictateur partiel.

C.Q.F.D.

Les deux résultats suivants ont pour but de montrer que le fait de postuler M n'a pas d'effet sur l'existence d'une SWF d'Arrow dès lors que $\mathcal{R}$ ne comprend que des chaînes.

Lemme 3 : Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_A$ ne comprend que des chaînes, alors une fonction de préférence collective à deux personnes sur $\mathcal{R}$ qui vérifie P et IAA, vérifie aussi M.

Démonstration : Soit f une fonction de préférence collective sur $\mathcal{R}$ vérifiant P et IAA.

Considérons $(R_1, R_2), (R'_1, R'_2) \in \mathcal{R}^2$ et $\{a, b\} \subseteq A$ tels que les conditions (1) et (2) de la définition de M soient vérifiées. Supposons d'abord que $aI(f(R_1, R_2))b$. D'après P,

soit $\quad aP(R_1)b$ et $bP(R_2)a \qquad (12)$

soit $\quad bP(R_1)a$ et $aP(R_2)b \qquad (13)$

Par symétrie, nous pouvons supposer que (12) est vérifiée. En choisissant (R'_1, R'_2),

soit $\quad aP(R'_1)b$ et $bP(R'_2)a \qquad (14)$

soit $\quad aP(R'_i)b$ pour $i = 1, 2. \qquad (15)$

Si (14), alors $aI(f(R'_1, R'_2))b$ d'après IIA, si (15), alors $aP(f(R'_1, R'_2))b$ d'après P, comme on le souhaite.

Supposons maintenant que $aP(f(R_1, R_2))b$. Alors d'après P,

soit $\quad aP(R_1)b$ et $bP(R_2)a \qquad (16)$

soit $\quad bP(R_1)a$ et $aP(R_2)b \qquad (17)$

soit $\quad aP(R_1)b$ et $aP(R_2)b \qquad (18)$

Si (16) ou (17) est vérifiée, le raisonnement est le même que précédemment, si c'est (18) qui est vérifiée alors en choisissant (R'_1, R'_2), $aP(R'_1)b$ et $aP(R'_2)b$ et par conséquent $aP(f(R'_1, R'_2))b$ d'après P. Ainsi f vérifie M.

C.Q.F.D.

Théorème 2 : Supposons que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_A$ ne comprend que des chaînes, s'il existe une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$, alors il existe une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$ qui vérifie M.

Démonstration : Supposons qu'il existe une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ ne contient que des chaînes ; d'après le théorème 1, il existe une SWF d'Arrow à 2 personnes sur $\mathcal{R}$; d'après le lemme 3, cette fonction de préférence collective vérifie M ; remarquons pour finir que la construction d'une SWF à n-personnes à partir d'une SWF à deux personnes dans la démonstration du théorème 1, préserve M.

C.Q.F.D.

Nous allons démontrer qu'il suffira de considérer des fonctions de préférence collective qui ne correspondent qu'à des chaînes. Pour un préordre $R \in \mathcal{R}_A$ et une relation binaire T transitive et asymétrique sur A, définissons la relation binaire T(R) sur A comme suit :

(19) $\forall a \in A,\ a\mathrm{T}(\mathrm{R})a$

(20) $\forall a,\ b \in A,\ a \neq b$, si $a\mathrm{I}(\mathrm{R})b$, alors $a\mathrm{I}(\mathrm{T}(\mathrm{R}))b$ à moins que $a\mathrm{T}b$ ou $b\mathrm{T}a$, auquel cas $a\mathrm{T}b \Rightarrow a\mathrm{P}(\mathrm{T}(\mathrm{R}))b$.

(21) $\forall a,\ b \in A$, si $a\mathrm{P}(\mathrm{R})b$, alors $a\mathrm{P}(\mathrm{T}(\mathrm{R}))b$.

Par construction de T(R), T «départage» par rapport à R ("is a tiebreaker on R"). A chaque fois que les alternatives sont à égalité (i.e. tombent dans la même classe d'indifférence) d'après R, T les départage si elle classe ces alternatives ; comme T est transitive, il n'est pas difficile de voir que T(R) est en fait un préordre qui préserve toutes les comparaisons binaires strictes de R.

Pour A et $\mathcal{R}$ définis comme précédemment, soit f une SWF à n-personnes sur $\mathcal{R}$, pour toute relation binaire T transitive asymétrique sur A, soit f_T la SWF à n-personnes définie comme suit :

$$\forall(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n) \in \mathcal{R}^n,\ f_T(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n) = \mathrm{T}(f(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n))$$

f_T est évidemment une SWF parce que

$$\forall(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n) \in \mathcal{R}^n \quad f_T(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n) \in \mathcal{R}_A .$$

Dictateur potentiel: Si f est une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$, alors l'individu $i \in \{1, \ldots, n\}$ est un dictateur potentiel pour f s'il existe une relation binaire transitive, asymétrique sur A telle que i est un dictateur pour f_T.

Pour que i soit un dictateur pour f_T mais pas pour f, il doit exister un couple non-trivial $\{a, b\} \subseteq A$ tel que i est un dictateur sur $\{a, b\}$ pour f_T mais pas pour f. Ce couple sera appellé *critique* pour i. Voici un exemple simple de dictateur potentiel et de couple critique : Supposons que f est une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$ et qu'il existe $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2 \in \mathcal{R}$ tels que pour un $\{a, b\} \in \mathrm{N}(\mathcal{R})$

$$a\mathrm{P}(\mathrm{R}_1)b,\ b\mathrm{P}(\mathrm{R}_2)a,\ a\mathrm{P}(f(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2))b \text{ et } a\mathrm{I}(f(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2))b. \tag{22}$$

Remarquons que d'après (22), f vérifie ND parce qu'aucun individu ne peut avoir ses préférences strictes sur a et b invariablement reflétées par le préordre social. Cependant, si nous choisissons T tel que $b\mathrm{T}a$, remarquons que l'individu 1 devient un dictateur sur $\{a, b\}$ sous f_T. En général, il est clair que si un couple $\{a, b\}$ est crucial pour i par rapport à une SWF d'Arrow à n-personnes f, alors il existe $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ tels que :

$$\sim (a\mathrm{I}(R_i)b) \text{ et } a\mathrm{I}(f(R_1, \ldots, R_n))b.$$

Lemme 4. – Soit f une SWF sur $\mathcal{R}$ vérifiant ND. Si $\{a, b\} \in \mathrm{N}(\mathcal{R})$ est critique pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors $j \neq i$, $\{a, b\}$ n'est pas critique pour j.

Démonstration : Supposons que $\{a, b\}$ est critique pour i et j $(i < j)$; choisissons $(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ tel que $a\mathrm{P}(R_i)b$ et $b\mathrm{P}(R_j)a$; si $a\mathrm{P}(f(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_n))b$, alors j ne peut pas être un dictateur potentiel pour f, d'où une contradiction. De même si $b\mathrm{P}(f(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_n))a$, i ne peut pas être un dictateur potentiel pour f. Par conséquent $a\mathrm{I}(f(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_n))b$. De même, $a\mathrm{I}(f(R_1, \ldots, R_j, \ldots, R_i, \ldots, R_n))b$. Supposons maintenant que T_i est une relation binaire transitive asymétrique sur A telle que c est un dictateur sur f_{Ti}. Si $\sim (aTb \text{ ou } bTa)$, alors

$$a\mathrm{I}(f_{Ti}(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_n))b,$$

contredisant le fait que i préfère b à a. Nous concluons donc que $\{a, b\}$ ne peut pas être critique pour i et j à la fois.

C.Q.F.D.

Théorème 3 : S'il existe une SWF d'Arrow à n-personnes f sur $\mathcal{R}$, il existe une SWF d'Arrow à n-personnes f' sur $\mathcal{R}$ dont le classement ne correspond qu'à des chaînes et qui préserve toutes les relations strictes de f(i.e. $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$, $\{a, b\} \subseteq \mathrm{A}$ si $a\mathrm{P}f(R_1, \ldots, R_n))b$, alors $a\mathrm{P}(f'(R_1, \ldots, R_n))b$).

Démonstration : Supposons que R est non-trivial ; autrement, le résultat est immédiat ; supposons que f est une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$. Soit D l'ensemble des dictateurs partiels pour f. Si $\mathrm{D} = \phi$, choisissons n'importe quel ordre fort T sur A et prenons $f' = f_T$. On peut vérifier aisément que f' satisfait les propriétés P et IIA. f' vérifie ND parce que f n'a pas de dictateur potentiel ; de façon évidente, le classement de f' ne comprend que des chaînes, et f' préserve les relations strictes de f. Si $\mathrm{D} \neq \phi$, supposons $\mathrm{D} = \{i_s, \ldots, i_m\}$; choisissons $\{(a_{i_1}, b_{i_1}), \ldots, (a_{i_m}, b_{i_m})\} \subseteq \mathrm{N}(\mathcal{R})$ tel que pour tout j, (a_{i_j}, b_{i_j}) est critique pour i_j ; comme (a_{i_1}, b_{i_1}) est critique pour i_1, il existe $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ tel que $\sim (a_{i_1}\mathrm{I}(R_{i_1})b_{i_1})$ mais $a_{i_1}\mathrm{I}(f(R_1, \ldots, R_n))b_{i_1}$. Soit T_1 la relation binaire asymétrique *définie seulement sur* $\{a_{i_1}, b_{i_1}\}$ telle que $T_1^{\{a_{i_1}, b_{i_1}\}} \neq R_{i_1}^{\{a_{i_1}, b_{i_1}\}}$.

Soit $f_1 = f_{T_1}$; f_1 vérifie évidemment P et IIA ; l'individu i_j n'est pas un dictateur pour f_1 parce que $(f_1(R_1, \ldots, R_n))^{\{a_{i_1}, b_{i_1}\}} \neq R_{i_1}$.

Aucun autre individu n'est dictateur pour f_1, parce que d'après le lemme 4, $\{a_{i_1}, b_{i_1}\}$ est critique seulement pour i_1 et T_1 ne touche que $\{a_{i_1}, b_{i_1}\}$. Ainsi f_1 est une SWF d'Arrow sur $\mathcal{R}$. Il est évident que f_1 préserve toutes les relations strictes de f. De plus, l'individu i_1 n'est pas un dictateur potentiel pour f_1 parce qu'il n'est pas un dictateur sur $\{a_{i_1}, b_{i_1}\}$ pour tout $(f_1)_T$. Comme T_1 n'affecte que $\{a_{i_1}, b_{i_1}\}$ et ainsi ne peut pas introduire ni éliminer des dictateurs potentiels, les dictateurs potentiels pour f_1 sont $\{i_2, \ldots, i_m\}$. Par itération, nous pouvons éliminer $\{i_2, \ldots, i_m\}$ comme dictateurs potentiels et compléter ainsi le procédé en choisissant un ordre fort T comme au début de la démonstration.

C.Q.F.D.

Corollaire : Le théorème 3 reste valide si nous stipulons de plus que f et f' doivent vérifier P*, PA, NNR, ou M.

Démonstration : Il est évident que le fait d'appliquer T à f n'affecte pas PA, NNR, ou M car les relations collectives strictes ne sont pas affectées. On peut s'assurer que P* est préservée, simplement en redéfinissant f_1 comme suit :

$\forall(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n \quad \forall(a, b) \subseteq A, \; a f_1 b$ ssi $a T(f(R_1, \ldots, R_n)) b$

à moins que $\quad \forall i \; a I(R_i) b$,

auquel cas prendre $\quad a I(f_T(R_1, \ldots, R_n)) b$.

C.Q.F.D.

3. EXISTENCE D'UNE SWF d'ARROW

Nous sommes maintenant prêts pour notre résultat principal : une caractérisation de ces domaines ne comprenant que des chaînes qui admettent des SWF d'Arrow. Le théorème 1 nous permet de ne considérer que des SWF à deux personnes. Le théorème 2 nous permet d'ajouter ou de supprimer les conditions PA, NNR ou M sans effet sur l'existence. L'idée sous-jacente à la caractérisation est la suivante : considérons un domaine $\mathcal{R}$ ne comprenant que des chaînes, nous aimerions construire une SWF d'Arrow. Si, pour tout couple $\{a, b\} \subseteq A$ et $(R_1, R_2) \in \mathcal{R}^2$, soit ($a P(R_1) b$ et $a P(R_2) b$) soit ($b P(R_1) a$ et $b P(R_2) a$), la préférence collective sur a et b est gouvernée par la propriété de Pareto. Si malgré tout,

soit $$aP(R_1)b \text{ et } bP(R_2)a \tag{23}$$

soit $$bP(R_1)a \text{ et } aP(R_2)a \tag{24}$$

alors il y a un «conflit» à régler. Nous pouvons «résoudre» le conflit de (23) en faisant appel à la relation asymétrique Q_1 qui départage. Si, par exemple, aQ_1b, alors nous prenons comme préférence collective sur a et b, $aP(f(R_1, R_2))b$. De même, une relation Q_2 peut permettre de départager dans la résolution du conflit de (24). Dans cet exemple, nous assignons à Q_1 de résoudre le conflit quand $aP(R_2)b$. Plus généralement, si V est une chaîne choisie sur A et si $\{\sigma, \delta\}$ et un couple d'alternatives de A tel que $\sigma V \delta$, nous pouvons assigner à Q_1 la tâche de résoudre les conflits quand $\sigma P(R_1)\delta$ et à Q_2 la tâche de les résoudre quand $\sigma P(R_2)\delta$. Une SWF d'Arrow à 2 personnes f sur $\mathcal{R}$ dont les préférences ne comprennent que des chaînes peut donc être entièrement résumée par un triplet (V, Q_1, Q_2). Cette représentation de f fournit un moyen facile de déterminer quelles sortes de préordres ne doivent pas être incluses dans $\mathcal{R}$ pour que f vérifie les conditions d'Arrow. Il apparaît que les conditions sur $\mathcal{R}$ nécessaires pour garantir l'existence d'une SWF d'Arrow peuvent être exprimées commodément en fonction des configurations que peuvent avoir V, Q_1 et Q_2. Nous avons besoin de la définition suivante :

Coin : Pour V, Q_1, Q_2 sur A et $\{a, b, c\} \subseteq A$, a est un coin pour (b, c) par rapport à (Q_i, Q_j) si pour certains $i, j \in \{1, 2\}$ (i pouvant être égal à j)

(I) aQ_ib

(II) cQ_ja

(III) $i = j$ ssi (aVb et aVc) ou (bVa et cVa)

Si a est un coin pour (b, c) et s'il existe une SWF d'Arrow sur $\mathcal{R}$, certaines chaînes sur $\{a, b, c\}$ doivent être omises de $\mathcal{R}$ (à savoir, $\langle a, b, c\rangle$ ou $\langle b, c, a\rangle$). Par exemple, supposons

$$V^{\{a,b,c\}} = Q_1^{\{a,b,c\}} = Q_2^{\{a,b,c\}} = \langle c, a, b\rangle.$$

On peut facilement vérifier que cette configuration implique que la SWF d'Arrow à deux personnes associée doit être *anonyme* sur $\{a, b, c\}$ (i.e. le préordre collectif de $\{a, b, c\}$ reste le même si l'ordre des individus est modifié). a est évidemment un coin pour (b, c). Si ni $\langle a, b, c\rangle$, ni $\langle b, c, a\rangle$ n'est omis, nous obtiendrons la table suivante en utilisant Q_1, Q_2 et la propriété de Pareto :

R_1	R_2	$f(R_1, R_2)$
a	b	a
b	c	b
c	a	c
		a

Remarquer que $f(R_1, R_2)$ fait un cycle, (i.e n'est pas transitive). Le théorème suivant, résume donc les omissions dues aux coins nécessaires pour empêcher le préordre social de faire un cycle (cependant la condition 1 n'est présente que pour éviter la dictature).

Théorème 4 : Choisissons n'importe quelle chaîne V sur A, pour tout domaine $\mathcal{R}\ (\subseteq \mathcal{R}_A)$ ne comprenant que des chaînes et pour tout entier $n\ (\geqslant 2)$, il existe une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$ ssi il existe des relations binaires, antisymétriques et totales Q_1 et Q_2 sur A vérifiant les conditions :

C.1 S'il existe $\{a, b\} \in N(\mathcal{R})$ tels que pour $\{j, k\} = \{1, 2\}$, aQ_jb et bQ_ka et aVb, alors il existe $\{c, d\} \in N(\mathcal{R})$ tels que cVd et cQ_jd et dQ_kc.

C.2 Pour tout triplet $\{a, b, c\} \subseteq A$, si a est un coin pour $\{b, c\}$, alors soit $\langle a, b, c\rangle$ soit $\langle b, c, a\rangle$ est omis de $\mathcal{R}$.

C.3 Pour tout triplet $\{a, b, c\}$, si a est un coin pour (b, c) par rapport à (Q_i, Q_j) et b est un coin pour (c, a) par rapport à (Q_k, Q_i), où $i, j, k \in \{1, 2\}$, alors $\langle b, c, a\rangle$ est omis de $\mathcal{R}$.

Démonstration : Soient V et $\mathcal{R}$ vérifiant les hypothèses précédentes.

Conditions nécessaires : Soit f une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$, d'après les théorèmes 1 et 3, nous pouvons supposer que $n = 2$ et que le classement de f ne comprend que des chaînes. Choisissons des relations binaires Q_1 et Q_2 sur A telles que :

$$\forall a \in A \quad aQ_ia \quad \text{pour } i = 1, 2 \tag{25}$$

$$\forall \{a, b\} \subseteq A, \text{ si } \forall R \in \mathcal{R}\ aP(R)b, \text{ alors } a(Q_i)b \text{ pour } i = 1, 2 \tag{26}$$

$$\forall \{a, b\} \subseteq A, \text{ si } aVb,\ aR_1b \text{ et } bR_2a, \text{ alors } (f(R_1, R_2))^{\{a,b\}} = Q_1^{\{a,b\}} \tag{27}$$

$$\forall \{a, b\} \subseteq A, \text{ si } bR_1a,\ aR_2b,\ aVg, \text{ alors } (f(R_1, R_2))^{\{a,b\}} = Q_2^{\{a,b\}} \tag{28}$$

Q_1 et Q_2 sont bien définies par IIA et par le fait que tous les éléments de $\mathcal{R}$ sont des chaînes. Ce sont des relations totales parce que le classement de f ne comprend que des chaînes. Elles sont évidemment antisymétriques. Il reste à vérifier que C1, C2 et C3 sont vérifiées :

C1. Remarquons que si $N(\mathcal{R}) = \emptyset$, C1 est vérifiée automatiquement. Supposons $N(\mathcal{R}) \neq \emptyset$ et considérons $\{j, k\} = \{1, 2\}$. Si $\forall \{a, b\} \in N(\mathcal{R})$, aVb implique $aQ_j b$ et $bQ_k a$, alors on peut vérifier que l'individu j est un dictateur pour f, ce qui contredit ND.

C2. Supposons que pour $\{a, b, c\} \subseteq A$, a est un coin pour (b, c) ; considérons $i, j = \{1, 2\}$ qui vérifient les conditions I-III de la définition d'un coin. Supposons qu'il existe $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ telles que $aR_1 bR_1 c$ et $bR_2 cR_2 a$.

Cas I $i \neq j$

Sans perte de généralité, supposons $i = 1$, $j = 2$. A partir de I et II, respectivement, $aQ_1 b$ et $cQ_2 a$. A partir de III,

soit $$aVb \text{ et } cVa \tag{29}$$

soit $$bVa \text{ et } aVc \tag{30}$$

Si (29), alors $af(R_1, R_2) bf(R_1, R_2) cf(R_1, R_2) a$, ce qui contredit la transitivité.

Si (3), alors $af(R_1, R_2) bf(R_2, R_1) bf(R_2, R_1) cf(R_2, R_1) a$, ce qui correspond de même à une contradiction.

Cas II $i = j$

Nous pouvons supposer $i = j = 1$, alors cQ_1 $aQ_2 b$; d'après III,

soit $$aVb \text{ et } aVc \tag{31}$$

soit $$bVa \text{ et } cVa. \tag{32}$$

Si (31), alors $af(R_1, R_2) bf(R_1, R_2) bf(R_1, R_2) cf(R_1, R_2) a$; si (32) est vérifiée, alors $af(R_2, R_1) bf(R_2, R_1) cf(R_2, R_1) a$, toutes deux contredisent la transitivité.

Par conséquent, C2 est établie.

C3. Supposons que pour $\{a, b, c\} \subseteq A$, a est un coin pour (b, c) par rapport à (Q_i, Q_j) et que b est un coin pour (c, a) par rapport à (Q_k, Q_l) ; supposons qu'il existe, en violation de C3, $R \in \mathcal{R}$ tel que $bRcRa$.

Cas I $i \neq j$

Supposons, sans perte de généralité que $i = 1$ et $j = 2$, c'est-à-dire, $aQ_1 b$ et $cQ_2 a$; parce que $aQ_1 b$, il existe $R' \in \mathcal{R}$ tel que $aR'b$. D'après III, soit (29) soit (30) est vérifiée.

Sous-cas I.1 : (29) vérifiée.

$af(R', R) b$ puisque $aQ_1 b$, $aR'b$ et aVb ; de même, $cf(R', R) a$ parce que cRa, cVa, et $cQ_2 a$; par transitivité, $cf(R', R) b$. Puisque

bRc, $cf(R', R)b$ implique que

soit $\qquad cQ_1 b$ et $cVb \qquad (33)$

soit $\qquad cQ_2 b$ et $bVc \qquad (34)$

Si (33), alors d'après I de la définition d'un coin, $fQ_2 c$. Puisque $bQ_2 c$, $aQ_1 b$ et aVb, nous avons d'après III, bVc ce qui contredit (33). (34) implique cependant que $cVaVbVc$, ce qui est impossible ; nous pouvons donc éliminer le sous-cas 1.

Sous-cas I.2 : (30) vérifiée.

Reprendre le raisonnement du sous-cas I.1, mais considérer $f(R, R')$ à la place de $f(R', R)$. Nous obtenons la même contradiction.

Cas II $i = j$

Par symétrie, nous pouvons supposer $i = j = 1$, c'est-à-dire, $cQ_1 aQ_1 b$; puisque $aQ_1 b$, il existe $R' \in R$ tel que $aR'b$, d'après III de la définition d'un coin, (31) ou (32) est vérifiée.

Sous-cas II.1 : (31) vérifiée.

$af(R', R)b$ et $cf(R', R)a$ par définition de Q_1, ainsi par transitivité, nous devons avoir $cf(R', R)b$ de sorte que $cR'b$. En conséquence, soit (bVc et $cQ_2 b$) soit (cVb et $cQ_1 b$). Mais, puisque b est un coin pour (Q_k, Q_i) et $i = 1$, nous devons avoir, d'après III, soit (cVb et $bQ_1 c$) soit (bVc et $bQ_2 c$), ce qui est une contradiction.

Sous-cas II.2 : (32) vérifiée.

Reprendre le raisonnement pour le sous cas II.1 en remplaçant $f(R, R')$ par $f(R', R)$.

Avec le sous-cas II.2, nous avons épuisé tous les cas qui permettent d'établir C3. La démonstration de la nécessité des conditions est donc complète.

Conditions suffisantes

Supposons que A, V et $\mathcal{R}_A$ définis comme précédemment, il existe Q_1 et Q_2 sur A vérifiant les hypothèses. Il suffit, d'après le théorème 1, d'exhiber une SWF d'Arrow à 2 personnes sur $\mathcal{R}$.

Pour tout R, $R_2 \in \mathcal{R}$, définissons la relation binaire $f(R_1, R_2)$ comme suit :

$$\forall a \in A \quad af(R_1, R_2)a \tag{35}$$

$$\forall \{a, b\} \subseteq A, \ aP(f(R_1, R_2))b \tag{36}$$

ssi soit (*a*) $aR_1 b$ et $aR_2 b$ soit (*b*) ($aR_1 b$, aVb, $aQ_1 b$) ou (bVa, $aR_2 b$, $aQ_2 b$).

Par construction, $f(R_1, R_2)$ est totale et antisymétrique.

Considérons la correspondance

$$(R_1, R_2) \to f(R_1, R_2)$$

De façon évidente, la correspondance f vérifie P et IIA. Si $N(\mathcal{R})$ est vide, alors f est trivialement non-dictatorial. Si $N(\mathcal{R}) \neq \phi$, alors d'après C1, soit il existe $\{a, b\} \in N(\mathcal{R})$ tel que aQ_1b et aQ_2b (auquel cas, un individu qui préfère b à a voit cette préférence reflétée par $f(R_1, R_2)$ seulement si l'autre individu y concourt), soit il existe $\{a, b\}$, $\{c, d\} \in N(\mathcal{R})$ tel que aQ_1b, bQ_1a, aVb, cQ_2d, dQ_1c et cVd (auquel cas, l'individu 1 est un dictateur sur $\{a, b\}$, pendant que l'individu 2 est un dictateur sur $\{c, d\}$). Dans chacun des cas, ND est vérifiée. Il reste seulement à montrer que f est une SWF ; i.e., que $f(R_1, R_2)$ est transitive pour tout $(R_1, R_2) \in \mathcal{R}^2$ et certains sous-ensembles de 3 alternatives $B = \{a, b, c\}$ pour lequel $aVbVc$,

soit $$af(R_1, R_2)bf(R_1, R_2)cf(R_1, R_2)a \tag{37}$$

soit $$af(R_1, R_2)cf(R_1, R_2)bf(R_1, R_2)a \tag{38}$$

Les deux possibilités conduisent à des contradictions. Nous le démontrerons seulement pour (37). Le raisonnement est très similaire pour (38), il est laissé au lecteur. Supposons donc que (37) est vérifiée.

Cas I : bQ_1a et bQ_2a

Puisque $af(R_1, R_2)b$, nous avons aR_1b et aR_2b ; comme $cf(R_1, R_2)a$, soit cR_1a soit cR_2a. Si les deux sont vraies, alors $R_1^B = R_2^B = \langle c, a, b\rangle$, et donc, d'après P, $cf(R_1, R_2)b$, ce qui contredit (37). Par conséquent aR_1c ou aR_2c. Par symétrie nous pouvons supposer aR_1c. Alors $R_2^B = \langle c, a, b\rangle$ et cQ_1a. Comme $bf(R_1, R_2)c$, nous en déduisons bR_1c et bQ_1c. Ainsi, $R_1^B = \langle a, b, c\rangle$ et bQ_1cQ_1a. Remarquons que c'est un coin pour (a, b). Par conséquent soit $\langle c, a, b\rangle$ soit $\langle a, b, c\rangle$ est omis, ce qui contredit les déductions précédentes. Donc le cas I est impossible.

Cas II : aQ_1b et bQ_2a

Comme $af(R_1, R_2)b$, nous en déduisons que aR_1b. Si aR_2b, nous en dérivons une contradiction comme dans le cas précédent, donc bR_2a.

Sous-cas II.1 : cQ_1a.

Remarquons que (39) a est un coin pour (b, c) par rapport à (Q_1, Q_2). Si cR_1a, alors cR_1b et ainsi bR_2c et bQ_2c puisque $fb(R_1, R_2)c$; ceci implique que b est un coin pour (c, a) par rapport à (Q_2, Q_1), ce qui, à son tour, signifie d'après (39) que $\langle b, c, a\rangle$ est omis et donc

$R_2^B = \langle b, a, c \rangle$ et $cQ_2 a$. Alors c'est un coin pour (a, b) par rapport à (Q_2, Q_2) ce qui implique, d'après III que $\langle c, a, b \rangle$ est omis, contredisant l'hypothèse $cR_1 a$. Par conséquent, nous devons avoir $aR_1 c$, $cR_2 a$ et $cQ_2 a$. Si $cR_1 b$, alors $bR_2 c$ et $bQ_2 c$ de sorte que $R_2^B = \langle b, c, a \rangle$ et b est un coin pour (c, a) par rapport à (Q_2, Q_1) impliquant avec (39) que $\langle b, c, a \rangle$ ce qui est une contradiction. Ainsi, nous avons $bR_1 c$; i.e. $R_1^B = \langle a, b, c \rangle$. Si $bQ_1 c$, alors c est un coin pour (a, b) par rapport à (Q_2, Q_1) de sorte que $\langle a, b, c \rangle$ est omis, ce qui est une contradiction. Par conséquent $cQ_1 b$ et donc $bR_2 c$ (i.e. $R_2^B = \langle b, c, a \rangle$) puisque $bf(R_1, R_2)c$. (39) implique, cependant, que $\langle a, b, c \rangle$ ou $\langle b, c, a \rangle$ est omis, ce qui est une contradiction. Ainsi le sous-cas II.1 est impossible.

Sous-cas II.2 : $aQ_1 c$.

Puisque $cf(R_1, R_2)a$, nous avons $cR_1 a$. Donc, $R_1^B = \langle c, a, b \rangle$ et, par conséquent, $bR_2 c$ et $bQ_2 c$ (ainsi $R_2^B = \langle b, c, a \rangle$ puisque $bf(R_1, R_2)c$; mais alors b est un coin pour (c, a) impliquant que soit $\langle c, a, b \rangle$ soit $\langle b, c, a \rangle$ est omis, ce qui est une contradiction. Le sous-cas II.2 est ainsi éliminé, ceci complétant la démonstration du cas II.

Cas III : $bQ_1 a$ et $aQ_2 b$
(symétrique du cas II)

Cas IV : $aQ_1 b$ et $aQ_2 b$

Si $aR_1 b$, reprendre alors le raisonnement du cas II (remarquer que l'on utilise jamais le fait que $aQ_2 b$). Ainsi supposons $bR_1 a$. Puique $af(R_1, R_2)b$, nous avons $aR_2 b$. Permuter maintenant les indices 1 et 2 et procéder comme dans le cas II pour terminer la démonstration.

C.Q.F.D.

Une conclusion presque immédiate du théorème 4 est le théorème d'impossibilité de Arrow.

Triplet libre : Pour $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_A$, une sous-ensemble $\{a, b, c\} \subseteq A$ est un triplet libre par rapport à $\mathcal{R}$ si aucune chaîne sur $\{a, b, c\}$ n'est omise de $\mathcal{R}$.

Corollaire (Arrow) : Il n'existe pas de SWF d'Arrow sur $\mathcal{R}_A$.

Démonstration : Soit V une chaîne sur A. Soit $\mathcal{R}_A^*$ qui ne comprend pas toutes les chaînes sur $\mathcal{R}_A$. S'il existe une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}_A$, alors la restriction f^* de f à $\mathcal{R}_A^*$ est évidemment aussi une SWF d'Arrow. Appliquant le théorème 4 à f^*, il existe Q_1 et Q_2 sur

A vérifiant C.1, C.2 et C.3. Soit f_2^* La SWF d'Arrow à deux personnes construite à partir de Q_1 et Q_2 comme dans la démonstration du théorème 4. Considérons un couple $\{a_0, b_0\} \subseteq A$; pour $c \in A \setminus \{a_0, b_0\}$, $C = \{a_0, b_0, c\}$ est un triplet libre. On peut vérifier que les seules configurations de Q_1^C et Q_2^C qui n'impliquent pas que l'un des a_0, b_0 et c soit un coin sont $(Q_1^C = V^C, Q_2^C = (V^{-1})^C)$ et $(Q_1^C = (V^{-1})^C, Q_2^C = V^C)$. La première configuration implique cependant que l'individu 1 est un dictateur sur C pour f_2^*, tandis que la seconde fait de l'individu 2 un dictateur. Puisque l'une des deux configurations doit être vraie ($\mathcal{R}_A^*$ est sans restrictions), supposons, sans perte de généralité, que c'est la première ; i.e. que l'individu 1 est un dictateur. En particulier l'individu 1 est un dictateur sur $\{a_0, b_0\}$. Considérons un couple $\{c_0, d_0\} \subseteq A$; pour simplifier, supposons $\{a_0, b_0\} \cap \{c_0, d_0\} = \emptyset$ (si ceci n'est pas vrai, le raisonnement est plus rapide). En raisonnant comme précédemment, il y a un dictateur sur $\{a_0, b_0, c_0\}$, et ainsi l'individu 1 est ce dictateur. En particulier, 1 est un dictateur sur $\{a_0, c_0\}$ et ainsi sur $\{a_0, b_0, c_0\}$ et $\{c_0, d_0\}$. Par conséquent 1 est un dictateur sur tout couple d'alternatives, en violation de ND.

C.Q.F.D.

Remarque : A partir de cette approche du théorème d'Impossibilité, il serait très facile de voir ce qui se passe. En nous restreignant à un triplet d'alternatives, nous voyons que la condition de transitivité sera violée (d'après la condition C.2) s'il n'y a pas de dictateur sur ce triplet ; de plus nous ne pouvons pas avoir des dictateurs différents sur différents triplets parce qu'autrement nous rencontrerions des contradictions aux intersections de ces triplets. Par conséquent, un individu doit être un dictateur sur tous les triplets : ND ne peut pas être vérifiée.

Le théorème 1 suggère encore une démonstration différente du théorème de Arrow. Le fait de se ramener à deux individus simplifie considérablement l'analyse ; ceci suggère que réduire le nombre d'*alternatives* serait, si cela était possible, avantageux. Le résultat suivant indique que nous pouvons en vérité ne considérer que trois alternatives.

Théorème 4a : Soit A un ensemble fini d'alternatives contenant au moins trois éléments. Si pour un entier $n \geqslant 2$, il existe une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}_A$, alors il existe un sous-ensemble $B \subseteq A$ avec $\#(B) = 3$ tel qu'une SWF d'Arrow à deux personnes existe sur $\mathcal{R}_B$.

Démonstration : Supposons que f est une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}_A$. D'après le théorème 1, nous pouvons supposer que $n = 2$; si $\#(A) = 3$, nous avons terminé ; si $\#(A) \geqslant 4$, choisissons un $a \in A$ et considérons la SWF f_a sur $\mathcal{R}_A \setminus \{a\}$ obtenue à partir de f en omettant

a de tous les préordres de $\mathcal{R}_A$. f_A vérifie évidemment IIA et P. Si f_A vérifie ND, nous avons réduit, avec succès, le nombre d'alternatives de 1. Supposons, cependant, que le même individu, —disons, l'individu 1— est un dictateur pour f_a. Alors 1 est un dictateur, pour f, sur tout compte d'alternatives ne comprenant pas a. De plus, il existe une alternative $b \in A\backslash\{a\}$ telle que 1 n'est pas un dictateur pour f sur $\{a, b\}$. Choisissons un $c \in A\backslash\{a, b\}$. Considérons f_c sur $\mathcal{R}_A\backslash\{c\}$ définie par analogie avec f_a. L'individu 1 n'est pas un dictateur pour f_c parce que $\{a, b\} \subseteq A\backslash\{c\}$ et 1 n'est pas un dictateur sur $\{a, b\}$. Choisissons $d \in A\backslash\{a, b, c\}$ (d existe puisque $\#(A) > 3$). L'individu 2 n'est pas un dictateur pour f_c parce que 1 est un dictateur sur $\{b, d\}$. Par conséquent f_c est une SWF d'Arrow à deux personnes. En procédant par itérations, nous pouvons réduire le nombre des alternatives à 3.

C.Q.F.D.

Remarque : D'après le théorème 4a, le théorème de Arrow se déduit de l'étude du cas à deux personnes et trois alternatives.

4. EXEMPLES

Bien que les conditions du théorème 4 puissent sembler compliquées, elles simplifient considérablement la recherche d'une SWF d'Arrow sur un domaine en reliant explicitement les fonctions de préférence collective aux conditions requises pour le domaine. Dans un texte d'il y a presque vingt ans, Blau [3] exhibe un exemple d'un domaine admettant un triplet libre pour lequel existe une SWF d'Arrow. En renforçant l'exemple de Blau, nous allons exhiber maintenant un domaine pour lequel toutes les alternatives appartiennent à un triplet libre et qui admet cependant une SWF d'Arrow. Nous pensons que notre exemple permettra d'illustrer l'utilité des conditions du théorème 4 pour analyser rapidement un domaine.

***Théorème** 5* : Il existe A et $\mathcal{R} (\subseteq \mathcal{R}_A)$ tels que $\{a, b, c\} \subseteq A$, $\{a, b, c\}$ n'est pas un triplet libre et tels qu'il existe, pour tout n, une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$.

Démonstration : Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots . R_{36}\}$ avec :

$R_1 = \langle a, b, d, e, c\rangle$	$R_{19} = \langle c, a, b, d, e\rangle$
$R_2 = \langle a, b, e, d, c\rangle$	$R_{20} = \langle a, c, b, d, e\rangle$
$R_3 = \langle a, d, b, e, c\rangle$	$R_{21} = \langle c, a, b, e, d\rangle$
$R_4 = \langle b, e, d, c, a\rangle$	$R_{22} = \langle a, c, b, e, d\rangle$
$R_5 = \langle b, e, d, a, c\rangle$	$R_{23} = \langle c, a, d, b, e\rangle$
$R_6 = \langle b, d, e, c, a\rangle$	$R_{24} = \langle a, c, d, b, e\rangle$
$R_7 = \langle b, d, e, a, c\rangle$	$R_{25} = \langle c, b, e, d, a\rangle$
$R_8 = \langle d, b, e, c, a\rangle$	$R_{26} = \langle c, b, d, e, a\rangle$
$R_9 = \langle d, b, e, a, c\rangle$	$R_{27} = \langle c, d, b, e, a\rangle$
$R_{10} = \langle c, a, e, b, d\rangle$	$R_{28} = \langle a, e, b, d, c\rangle$
$R_{11} = \langle a, c, e, b, d\rangle$	$R_{29} = \langle a, e, d, b, c\rangle$
$R_{12} = \langle c, a, e, d, b\rangle$	$R_{30} = \langle a, d, e, b, c\rangle$
$R_{13} = \langle a, c, e, d, b\rangle$	$R_{31} = \langle e, b, d, c, a\rangle$
$R_{14} = \langle c, a, d, e, b\rangle$	$R_{32} = \langle e, b, d, a, c\rangle$
$R_{15} = \langle a, c, d, e, b\rangle$	$R_{33} = \langle d, e, b, c, a\rangle$
$R_{16} = \langle c, e, b, d, a\rangle$	$R_{34} = \langle d, e, b, a, c\rangle$
$R_{17} = \langle c, d, e, b, a\rangle$	$R_{35} = \langle e, d, b, c, a\rangle$
$R_{18} = \langle c, e, d, b, a\rangle$	$R_{36} = \langle e, d, b, a, c\rangle$

La première étape dans l'analyse du domaine est de faire la liste des chaînes omises sur les triplets. pour $\mathcal{R}$, ce sont :

(R.1)	$\langle b, a, d\rangle$	et	$\langle d, a, b\rangle$	pour	$\{a, b, d\}$
(R.2)	$\langle a, b, e\rangle$	et	$\langle e, a, b\rangle$	pour	$\{a, b, e\}$
(R.3)	$\langle d, a, e\rangle$	et	$\langle e, a, d\rangle$	pour	$\{a, d, e\}$
(R.4)	$\langle b, c, e\rangle$	et	$\langle e, c, b\rangle$	pour	$\{b, c, e\}$
(R.5)	$\langle b, c, d\rangle$	et	$\langle d, c, b\rangle$	pour	$\{c, d, e\}$
(R.6)	$\langle d, c, e\rangle$	et	$\langle e, c, d\rangle$	pour	$\{c, d, e\}$

Remarquons à partir de cette table, que $\{a, b, c\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$ et $\{b, d, e\}$ sont des triplets libres ; ainsi toute alternative appartient à un triplet libre. Choisissons $V = \langle a, b, c, d, e\rangle$; s'il existe une SWF d'Arrow sur $\mathcal{R}$, alors il existe Q_1 et Q_2 sur A vérifiant C.1, C.2 et C.3. Remarquons que toutes les configurations de Q_1, Q_2 et V des hypothèses de C.2 à C.7 impliquent l'omission d'au moins une chaîne. Par conséquent, si $\{x, y, z\}$ est un triplet libre, $Q_1^{\{x,y,z\}}$ et $Q_2^{\{x,y,z\}}$ doivent vérifier :

$$Q_1^{\{x,y,z\}} = (Q_2^{\{x,y,z\}})^{-1} \quad \text{et} \quad Q_1^{\{x,y,z\}} \in \{V^{\{x,y,z\}}, (V^{\{x,y,z\}})^{-1}\}$$

Nous avons donc pour $i = \{1, 2\}$

$$Q_i^{\{a,b,c\}} \in \{\langle a, b, c\rangle, \langle c, b, a\rangle\}$$
$$Q_i^{\{a,c,d\}} \in \{\langle a, c, d\rangle, \langle d, c, a\rangle\}$$
$$Q_i^{\{a,c,e\}} \in \{\langle a, c, e\rangle, \langle e, c, a\rangle\}$$
$$Q_i^{\{b,d,e\}} \in \{\langle b, d, e\rangle, \langle e, d, b\rangle\}$$

Par symétrie, nous pouvons supposer $Q^{\{a,b,c\}} = \langle a, b, c\rangle$. Alors aQ_1c, ainsi $Q_1^{\{a,c,d\}} = \langle a, c, d\rangle$ et $Q_1^{\{a,c,e\}} = \langle a, c, e\rangle$ (et désormais $Q_2^{\{a,c,d\}} = \langle d, c, a\rangle$, $Q_2^{\{a,b,c\}} = \langle c, b, a\rangle$, $Q_2^{\{a,c,e\}} = \langle e, c, a\rangle$).

Maintenant si $Q_1^{\{b,d,e\}} = \langle b, d, e\rangle$, et $Q_1^{\{a,b,d\}} = \langle a, b, d\rangle$. Nous en déduisons que $Q_1 = \langle a, b, c, d, e\rangle$ et $Q_2 = \langle \underline{\underline{e}}, d, c, b, a\rangle$, une violation de C.1. Par conséquent nous devons avoir $Q_1^{\{b,d,e\}} = \langle e, d, b\rangle$, d'où nous déduisons que $Q_2^{\{b,d,e\}} = \langle b, d, e\rangle$ et :

(R.1*)	$Q_1^{\{a,b,d\}} = \langle a, d, b\rangle$
	$Q_2^{\{a,b,d\}} = \langle b, d, a\rangle$
(R.2*)	$Q_1^{\{a,b,e\}} = \langle a, e, b\rangle$
	$Q_2^{\{a,b,e\}} = \langle b, e, a\rangle$
(R.3*)	$Q_1^{\{d,a,e\}} = \langle a, e, d\rangle$
	$Q_2^{\{e,a,d\}} = \langle d, e, a\rangle$
(R.4*)	$b\,Q_1\;c\,Q_1\;e\,Q_1\;b$
	$c\,Q_2\;b\,Q_2\;e\,Q_2\;c$
(R.5*)	$b\,Q_1\;d\,Q_1\;c\,Q_1\;b$
	$c\,Q_2\;b\,Q_2\;d\,Q_2\;c$
(R.6*)	$Q_1^{\{c,d,e\}} = \langle c, e, d\rangle$
	$Q_2^{\{c,d,e\}} = \langle e, c, d\rangle$

Maintenant d'après R.1*, R.2*, R.3*, R.6* et C.2 nous concluons que $\langle b, a, e\rangle$, $\langle e, a, b\rangle$, $\langle d, a, e\rangle$, $\langle e, a, d\rangle$, $\langle d, c, e\rangle$ et $\langle e, c, d\rangle$ sont omis, ce qui s'accorde avec (R.1), (R.2), (R.3) et (R.6). D'après R.4*, R.5* et C.2, nous concluons que $\langle b, c, e\rangle, \langle e, c, b\rangle, \langle b, c, d\rangle$ et $\langle d, c, b\rangle$ sont omises, ce qui s'accorde avec R.4 et R.5 ; ainsi Q_1 et Q_2 vérifient les conditions C.2 et C.3. De plus, il est évident que $\{a, d\}$, $\{d, b\} \in N(\mathcal{R})$ et aVd, aQ_1d, dQ_1a, bVd, dQ_1b, bQ_2d, ainsi C.1 est vérifiée et d'après le théorème 4, il existe une SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$ pour tout n.

C.Q.F.D.

Nous démontrons maintenant, qu'au rebours du théorème 5, même si aucun triplet d'alternatives ne constitue un triplet libre, il peut encore ne pas exister une SWF d'Arrow sur un domaine donné.

Théorème 6 : Il existe A et un domaine $\mathcal{R}\ (\subseteq \mathcal{R}_A)$ pour lesquels aucun triplet d'alternatives n'est un triplet libre tels que, $\forall n \geqslant 2$, il n'existe aucune SWF d'Arrow à n-personnes sur $\mathcal{R}$.

Démonstration : De nouveau, la démonstration se fait en citant explicitement un exemple. Soit $A = \{x, y, z, w\}$ et $\mathcal{R}\ (\subseteq \mathcal{R}_A)$ tels que $R = \{R_1, R_2, \ldots, R_{13}\}$ avec :

$$\begin{array}{ll}
R_1 = \langle x, z, y, w \rangle & R_7 = \langle y, x, w, z \rangle \\
R_2 = \langle y, w, z, x \rangle & R_8 = \langle y, x, z, w \rangle \\
R_3 = \langle y, z, w, x \rangle & R_9 = \langle w, x, z, y \rangle \\
R_4 = \langle y, w, x, z \rangle & R_{10} = \langle w, z, x, y \rangle \\
R_5 = \langle z, y, w, x \rangle & R_{11} = \langle z, w, x, y \rangle \\
R_6 = \langle y, z, x, w \rangle & R_{12} = \langle w, z, y, x \rangle \\
 & R_{13} = \langle z, w, y, x \rangle
\end{array}$$

La liste des chaînes omises sur les triplets est, comme on peut le vérifier : $\langle x, y, z \rangle$, $\langle x, w, y \rangle$, $\langle z, x, w \rangle$ et $\langle w, y, z \rangle$ (i.e. une chaîne omise pour chaque triplet d'alternatives). Choisissons $V = \langle x, y, z, w \rangle$. Supposons qu'il existe Q_1 et Q_2 sur A vérifiant les conditions C.2 et C.3 du théorème 4. Puisque seul $\langle x, y, z \rangle$ est omis pour le triplet $\langle x, y, z \rangle$, une des conditions suivantes doit être vérifiée :

$$\begin{array}{lll}
\text{(X.1)}\quad Q_1 = \langle z, x, y \rangle & Q_2 = \langle z, x, y \rangle & \multirow{}{}{} \\
\text{(X.2)}\quad Q_1 = \langle y, z, x \rangle & Q_2 = \langle y, z, x \rangle & \left.\right\} \text{si C.2 s'applique ;} \\
\text{(X.3)}\quad Q_1 = \langle z, y, x \rangle & Q_2 = \langle z, x, y, z \rangle & \\
\text{(X.4)}\quad Q_1 = \langle z, x, y, z \rangle & Q_2 = \langle z, y, x \rangle & \\
\text{(X.5)}\quad Q_1 = \langle x, y, z \rangle & Q_2 = \langle z, y, x \rangle & \\
\text{(X.6)}\quad Q_1 = \langle z, y, x \rangle & Q_2 = \langle z, y, x \rangle &
\end{array}$$

(X.3)–(X.6) : si ni C.2 ni C.3 ne s'appliquent (i.e. un individu est un dictateur sur $\{x, y, z\}$)).

C.3 ne s'applique pas parce qu'elle entraîne l'omission de plus d'une chaîne par triplet ; de même, pour $\{x, y, w\}$, $\{y, z, w\}$, et $\{x, z, w\}$, l'une des conditions Y, Z, W suivantes doit être vérifiée :

$$\{x, y, w\}$$

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{Y}.1) & Q_1 = \langle y, x, w\rangle & \left.\begin{array}{l} Q_2 = \langle y, x, w\rangle \\ Q_2 = \langle w, y, x\rangle \\ Q_2 = \langle y, x, w\rangle \\ Q_2 = \langle w, y, x\rangle \end{array}\right\} \text{si C.2 s'applique} \\
(\mathrm{Y}.2) & Q_1 = \langle w, y, x\rangle & \\
(\mathrm{Y}.3) & Q_1 = \langle w, y, x\rangle & \\
(\mathrm{Y}.4) & Q_1 = \langle y, x, w\rangle & \\
(\mathrm{Y}.5) & Q_1 = \langle x, y, w\rangle & \left.\begin{array}{l} Q_2 = \langle w, y, x\rangle \\ Q_2 = \langle x, y, w\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{si ni C.2 ni C.3} \\ \text{ne s'appliquent}\end{array} \\
(\mathrm{Y}.6) & Q_1 = \langle w, y, x\rangle &
\end{array}$$

$$\{y, z, w\}$$

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{Z}.1) & Q_1 = \langle y, z, w\rangle & \left.\begin{array}{l} Q_2 = \langle y, z, w\rangle \\ Q_2 = \langle z, w, y\rangle \\ Q_2 = \langle z, w, y\rangle \\ Q_2 = \langle y, z, w\rangle \end{array}\right\} \text{si C.2 s'applique} \\
(\mathrm{Z}.2) & Q_1 = \langle z, w, y\rangle & \\
(\mathrm{Z}.3) & Q_1 = \langle y, z, w\rangle & \\
(\mathrm{Z}.4) & Q_1 = \langle z, w, y\rangle & \\
(\mathrm{Z}.5) & Q_1 = \langle y, z, w\rangle & \left.\begin{array}{l} Q_2 = \langle w, z, y\rangle \\ Q_2 = \langle y, z, w\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{si ni C.2 ni C.3} \\ \text{ne s'appliquent.}\end{array} \\
(\mathrm{Z}.6) & Q_1 = \langle w, z, y\rangle &
\end{array}$$

$$\{x, z, w\}$$

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{W}.1) & Q_1 = \langle x, w, z\rangle & \left.\begin{array}{l} Q_2 = \langle x, w, z\rangle \\ Q_2 = \langle w, z, x\rangle \\ Q_2 = \langle x, w, z\rangle \\ Q_2 = \langle w, z, x\rangle \end{array}\right\} \text{si C.2 s'applique} \\
(\mathrm{W}.2) & Q_1 = \langle w, z, x\rangle & \\
(\mathrm{W}.3) & Q_1 = \langle w, z, x\rangle & \\
(\mathrm{W}.4) & Q_1 = \langle x, w, z\rangle & \\
(\mathrm{W}.5) & Q_1 = \langle x, z, w\rangle & \left.\begin{array}{l} Q_2 = \langle w, z, x\rangle \\ Q_2 = \langle x, z, w\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{si ni C.2 ni C.3} \\ \text{ne s'appliquent.}\end{array} \\
(\mathrm{W}.6) & Q_1 = \langle w, z, x\rangle &
\end{array}$$

On peut vérifier (au terme d'un travail simple mais un peu fastidieux) que les seules paires (Q_1, Q_2) qui vérifient chacune des conditions x, y, z et w sont :

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{E}.1) & Q_1 = \langle x, y, z, w\rangle & Q_2 = \langle w, z, y, x\rangle \\
(\mathrm{E}.2) & Q_2 = \langle w, z, y, x\rangle & Q_2 = \langle x, y, z, w\rangle
\end{array}$$

Mais (E.1) et (E.2) violent tous les deux C.1 (E.1 implique que l'individu 1 est un dictateur ; E.2 implique que l'individu 2 est un dictateur). Ainsi il n'existe pas de SWF d'Arrow sur $\mathcal{R}$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ARROW K.J. – *Social Choice and Individual Values,* New Haven : Yale, 1963.

[2] BLACK D. – On the Rationale of Group Decision Making, *Journal of Political Economy,* 56, 1948.

[3] BLAU J.H. – The Existence of a Social Welfare Function, *Econometrica,* 25, 1957.

[4] SEN A.K. – A Possibility Theorem on Majority Decisions, *Econometrica,* 34, 1966.

[5] SEN A.K. – *Collective Choice and Social Welfare,* San Francisco : Holden-Day, 1970.

[6] SEN A.K. and PATTANAIK P. – Necessary and Sufficient Conditions for Rational Choice under Majority Decision, *Journal of Economic Theory,* 1, 1969.

[7] MASKIN E.S. – Social Welfare Functions for Economics, Mimeo., Cambridge University, 1976.

[8] MASKIN E.S. – Arrow Social Welfare Functions on Restricted Domains : The Two-Person Case, Cambridge University, 1976.